Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

77. BAND, 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 31. AUGUST 1961)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1961

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.

H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG

Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 830301, Fernschreibnummer 01-83319
Heidelberg 1, Postfach 3027, Fernsprecher 27901, Fernschreibnummer 04-61723
Göttingen, Weender Straße 60.

---

77. Band — **Inhalt** — 1. Heft

Seite

Baer, R., Einfache Partitionen nicht-einfacher Gruppen 1

Meister, E., Ein Eindeutigkeitsbeweis für ein gemischtes Randwertproblem der Schwingungsgleichung 38

Müller, D., Verbandsgruppen und Durchschnitte endlich vieler Bewertungsringe . 45

Breuer, M., Zum Pfaffschen Problem 63

Hoehnke, H.-J., Über die Erzeugung von monomialen Gruppendarstellungen durch Brandtsche Gruppoide 68

Haupt, O., Ordnungsgeometrische Limessätze in kompakten Räumen. I. Mitteilung: Komponentenordnungswerte 81

Wagner, R., Interne Kennzeichnung projektiver Abbildungen auf Quadriken. . . 94

Baer, R.
Math. Zeitschr. 77, 1—37 (1961)

Einfache Partitionen nicht-einfacher Gruppen

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

Reinhold Baer

Unter einer Partition der endlichen Gruppe G ($\neq 1$) verstehen wir eine Menge σ von 1 verschiedener Untergruppen von G [die Komponenten von σ] derart, daß jedes von 1 verschiedene Element aus G in einer und nur einer Komponente von σ liegt. Besteht σ nur aus G, so heißt σ trivial; und σ heißt normal, wenn mit X auch alle zu X in G konjugierten Untergruppen von G Komponenten von σ sind. Schließlich heiße σ einfach, wenn es zu jedem eigentlichen Normalteiler K von G eine Komponente S von σ mit $1 \neq K \cap S \neq S$ gibt. Natürlich folgt aus der Einfachheit von G auch die von σ. Für diese und verwandte Begriffe vgl. Baer [2], im folgenden mit I zitiert.

Wir haben an anderer Stelle (Baer [3], im folgenden mit II zitiert) gezeigt, daß die normale, nicht-triviale Partition σ von G dann und nur dann einfach ist, wenn entweder der Sockel $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht-abelsch ist oder aber G die symmetrische Gruppe des Grades 4 [und der Ordnung 24] ist und σ aus den sämtlichen nicht in $\mathfrak{S}G$ enthaltenen zyklischen Untergruppen von G besteht. In Ergänzung dieses Satzes wollen wir nun hier das folgende Resultat beweisen:

Hauptsatz. *Ist der Sockel $\mathfrak{S}G$ von G einfach und nicht abelsch, ist $G \neq \mathfrak{S}G$, besitzt G eine nicht triviale Partition, so gilt:*

(a) $[G : \mathfrak{S}G] = 2$.

(b) *Die Sylow-Untergruppen ungerader Ordnung von G sind abelsch.*

(c) *Die 2-Sylow-Untergruppen von G sind nicht dedekindsch.*

Im Abschnitt A werden wir einige vorbereitende Resultate beweisen, die zum Teil [wie etwa Satz A.9 und Satz A.11] auch von unabhängigem Interesse zu sein scheinen. Im Abschnitt B werden wir dann den Beweis des Hauptsatzes erbringen. Im Abschnitt C wird die Analyse der 2-Sylow-Untergruppen weitergetrieben, über deren Struktur und Situation wir Aussagen machen werden, die erheblich über die Aussage (c) des Hauptsatzes hinausgehen. Insbesondere werden wir die folgende Ergänzung von (c) beweisen:

(c*) *Die 2-Sylow-Untergruppen von G sind Dieder-Gruppen.*

Die im Abschnitt C gewonnenen Resultate über die 2-Sylow-Untergruppen von G gestatten dann, im Abschnitt D noch die folgende interessante Ergänzung des Hauptsatzes zu beweisen.

EINFACHHEITSKRITERIUM. *Die folgenden Eigenschaften der normalen und nicht-trivialen Partition σ der nicht-einfachen Gruppe G sind äquivalent:*

(I) *σ ist einfach.*

(II) *Ist $\mathfrak{F}G \neq 1$, so ist G isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 4.*

(III) *Ist G nicht isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 4, so ist $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht-abelsch.*

(IV) *G enthält eine zur symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorphe Untergruppe.*

Die Resultate werden schließlich im Abschnitt E auf das Studium der normalen, nicht trivialen Partitionen mit Komponenten, die weder primär noch Hallsche Untergruppen sind, angewandt. Diese sind dadurch von besonderem Interesse, daß sie von 1 verschiedene Elemente enthalten, deren Zentralisator nicht nilpotent ist [Zusatz A.6].

Begriffsbildungen und Bezeichnungen aus unserem ersten Beitrag zur Theorie der Partitionen endlicher Gruppen werden wir ständig [und meist ohne besonderen Verweis] benutzen.

BEZEICHNUNGEN:

$o(g)$ = Ordnung des Gruppenelements g.

$o(G)$ = Ordnung der Gruppe G.

p-Element [p-Gruppe] = Gruppenelement [Gruppe] mit p-Potenzordnung.

$\mathfrak{Z}G$ = Zentrum der Gruppe G.

$\mathfrak{F}G$ = Fittingsche Untergruppe der Gruppe G = Produkt aller nilpotenten Normalteiler von G.

$\mathfrak{S}G$ = Sockel der Gruppe G = Produkt aller minimalen Normalteiler von G.

$\mathfrak{N}U$ = Normalisator der Untergruppe U von G in G.

$\mathfrak{C}U$ = Zentralisator der Teilmenge U von G in G.

$a^b = b^{-1}ab = a(a \circ b)$.

$x \circ Y$ = Menge der Kommutatoren $x \circ y$ mit y in Y.

Normalisatorgleich sind $U = \mathfrak{N}U$ erfüllende Untergruppen U.

Hallsche Untergruppen sind Untergruppen U von G mit $(o(U), [G:U]) = 1$.

$A < B$ bedeutet, daß A eine Untergruppe von B und $B \neq A$ ist.

ALLE BETRACHTETEN GRUPPEN SIND ENDLICH.

A. Wir wollen zunächst eine Reihe von Eigenschaften einfacher Partitionen zusammenstellen, die wir ständig gebrauchen werden.

HILFSSATZ A.1. *Ist G eine Gruppe mit einfachem, nicht-abelschem Sockel $\mathfrak{S}G$ und σ eine normale, nicht-triviale Partition von G, so gilt:*

(a) *σ ist einfach.*

(b) *Alle Komponenten von σ sind nilpotent.*

(c) *$\mathfrak{S}G$ ist in keiner Komponente von σ enthalten.*

(d) *Ist U eine $\mathfrak{S}G$ enthaltende Untergruppe von G, so ist $\mathfrak{S}U = \mathfrak{S}G$.*

Beweis. Wäre σ nicht einfach, so gäbe es einen eigentlichen, σ-zulässigen Normalteiler K von G. Dieser wäre nach einem Satz von Kegel nilpotent; vgl. Kegel [Satz 2]. Jeder in K enthaltene minimale Normalteiler von G ist also abelsch. Da es aber wenigstens einen in $K \neq 1$ enthaltenen minimalen Normalteiler von G gibt, so enthält $\mathfrak{S}G$ wenigstens einen von 1 verschiedenen, abelschen Normalteiler von G im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, daß $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht abelsch ist. Also ist σ einfach. [Man bemerke, daß wir von der Normalität von σ bisher keinen Gebrauch gemacht haben.]

Aus der Einfachheit von σ folgt insbesondere, daß σ keine Frobenius-Partition von G ist; vgl. I, Satz 4.1, (1). Also ist keine der Komponenten von σ normalisatorgleich; und es folgt aus einem Satz von Kegel, daß alle Komponenten von σ nilpotent sind; vgl. Kegel [Satz 2].

Da $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht-abelsch ist, so folgt (c) aus (b).

Ist U eine $\mathfrak{S}G$ enthaltende Untergruppe von G, so ist $\mathfrak{S}G$ als einfacher Normalteiler von U gewiß in $\mathfrak{S}U$ enthalten. Wäre $\mathfrak{S}G \neq \mathfrak{S}U$, so wäre der einfache Normalteiler $\mathfrak{S}G$ von U ein direkter Faktor von $\mathfrak{S}U$; s. etwa Specht [p. 272—274]. Hieraus würde zunächst $\mathfrak{C}\mathfrak{S}G \neq 1$ folgen. Andererseits ist $1 = \mathfrak{Z}\mathfrak{S}G = \mathfrak{S}G \cap \mathfrak{C}\mathfrak{S}G$, da $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht abelsch ist. Da die mit $\mathfrak{S}G$ charakteristische Untergruppe $\mathfrak{C}\mathfrak{S}G \neq 1$ minimale Normalteiler von G enthält, die dann in $\mathfrak{S}G \cap \mathfrak{C}\mathfrak{S}G = 1$ enthalten sind, so sind wir zu einem Widerspruch geführt worden, aus dem (d) folgt.

Hilfssatz A.2. *Sind K und L echte Normalteiler von $G = KL$, so ist $L \cap \mathfrak{C}k \neq 1$ für jedes Element k aus K.*

Beweis. Sei k ein Element aus K mit $L \cap \mathfrak{C}k = 1$. Sind dann x und y Elemente aus L mit $k \circ x = k \circ y$, so ist auch $k^x = k^y$, woraus die Zugehörigkeit von xy^{-1} zu $L \cap \mathfrak{C}k = 1$ folgt. Also ist $xy^{-1} = 1$ und $x = y$. Mithin enthält die Menge $k \circ L$ von Kommutatoren $k \circ x$ mit x aus L genau $o(L)$ Elemente. Da L ein Normalteiler von KL ist, so ist $k \circ L$ eine Teilmenge von L; und aus der Gleichmächtigkeit von L und $k \circ L$ folgt $L = k \circ L$. Da k in dem Normalteiler K von KL liegt, so ist $L = k \circ L$ in K enthalten, woraus $K = KL = G$ folgt. Dies widerspricht unserer Annahme, daß K ein echter Normalteiler von G ist; und aus diesem Widerspruch ergibt sich $L \cap \mathfrak{C}k \neq 1$ für jedes k aus K.

Lemma A.3. *Ist K ein eigentlicher Normalteiler der Gruppe G mit p-Faktorgruppe G/K, ist die p-Sylow-Untergruppe P von G in der Komponente S der Partition σ von G enthalten, so ist $S = \mathfrak{N}S$.*

Beweis. Wäre dies nicht wahr, so wäre also $S \neq \mathfrak{N}S$; und wir könnten aus einem Kegelschen Satz die Nilpotenz von S folgern; vgl. Kegel [Satz 2]. Da die p-Sylow-Untergruppe P von G in der nilpotenten Gruppe S enthalten ist, so ist P die p-Sylow-Untergruppe von S und also eine charakteristische Untergruppe von S und ein Normalteiler von $\mathfrak{N}S$. Da G/K eine von 1 verschiedene p-Gruppe ist, so wird $G = KP$ und $P \neq 1$. Aus $P \subseteq S \subset \mathfrak{N}S \subseteq G = PK$ und dem Dedekindschen Modulsatz folgt $\mathfrak{N}S = P(K \cap \mathfrak{N}S)$, so daß $K \cap \mathfrak{N}S$ nicht in S enthalten sein kann. Da S eine Komponente von σ ist und es nicht zu S

gehörige Elemente in $K \cap \mathfrak{N} S$ gibt, so gibt es ein Element w von Primzahlordnung, das zu $K \cap \mathfrak{N} S$, aber nicht zu S gehört. Da P ein Normalteiler von $\mathfrak{N} S$ ist und also von w normalisiert wird, da w nicht zu S und also auch nicht zu P gehört, und da $P \neq 1$ eine p-Sylow-Untergruppe von G ist, so ist $p = o(w)$. Wäre w mit einem Element $t \neq 1$ aus P vertauschbar, so würde aus I, Lemma 2.1 wegen der Teilerfremdheit von $o(w)$ und $o(t)$ folgen, daß w und t der gleichen Komponente S von σ angehören, was aber durch die Wahl von w ausgeschlossen ist. Also ist $P \cap \mathfrak{C} w = 1$.

P und $K \cap \mathfrak{N} S$ sind Normalteiler von $\mathfrak{N} S$. Von diesen liegt P nicht in K und also auch nicht in $K \cap \mathfrak{N} S$, da ja $K < G = KP$ ist; und $K \cap \mathfrak{N} S$ liegt nicht in S und erst recht nicht in P. Also sind P und $K \cap \mathfrak{N} S$ eigentliche Normalteiler ihres Produkts $P(K \cap \mathfrak{N} S)$. Anwendung von Hilfssatz A.2 ergibt $P \cap \mathfrak{C} w \neq 1$, da ja w in $K \cap \mathfrak{N} S$ liegt. Damit sind wir zu einem Widerspruch geführt worden, aus dem $S = \mathfrak{N} S$ folgt.

BEMERKUNG A.4. Ist S eine normalisatorgleiche Komponente der normalen Partition σ von G, so ist entweder σ trivial und $S = G$ oder σ ist eine Frobenius-Partition, auf die wir I, Satz 4.1 anwenden können.

LEMMA A.5. *Die folgenden Eigenschaften der Komponente X der normalen Partition σ von G sind äquivalent:*

(a) *X ist eine Hallsche Untergruppe von G.*

(b) *X ist eine Hallsche Untergruppe von $\mathfrak{N} X$.*

(c) *$X = \mathfrak{N} X$ oder $\sigma \cap \mathfrak{N} X$ ist eine minimale Frobenius-Partition von $\mathfrak{N} X$.*

BEWEIS. Es ist klar, daß (b) aus (a) folgt. — Wir nehmen als nächstes an, daß $X \neq \mathfrak{N} X$ und X ein Hallscher Normalteiler von $\mathfrak{N} X$ ist. Dann ist $\sigma \cap \mathfrak{N} X$ eine normale, nicht-einfache Partition von $\mathfrak{N} X$; und $\mathfrak{N} X$ ist gewiß keine Primärgruppe. Aus I, Satz 5.1, (a) folgt, daß $\sigma \cap \mathfrak{N} X$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N} X$ ist; und aus I, Satz 4.1, (4) ergibt sich weiter $X \subseteq \mathfrak{F} \mathfrak{N} X$. Ist $\mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ nicht primär, so ist die nilpotente Untergruppe $\mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ von $\mathfrak{N} X$ wegen I, Folgerung 2.3 ganz in einer Komponente von $\sigma \cap \mathfrak{N} X$ enthalten und also $X = \mathfrak{F} \mathfrak{N} X$. Ist aber $\mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ primär, so folgt $X = \mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ aus $1 < X \subseteq \mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ und der Tatsache, daß X als Hallsche Untergruppe von $\mathfrak{N} X$ auch eine von $\mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ ist. Also ist $\sigma \cap \mathfrak{N} X$ eine minimale Frobenius-Partition von $\mathfrak{N} X$; und wir haben (c) aus (b) hergeleitet.

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (c) an. Ist zunächst $X = \mathfrak{N} X$, so ist entweder $X = G$ und dann ist X sicherlich eine Hallsche Untergruppe von G; oder aber es ist $X \neq G$ und σ ist eine Frobenius-Partition von G. Wegen I, Satz 4.1, (1) und (2) ist dann X eine Hallsche Untergruppe von G. Bleibt noch der Fall, daß $X \neq \mathfrak{N} X$ ist. Dann ist $\sigma \cap \mathfrak{N} X$ eine minimale Frobenius-Partition von $\mathfrak{N} X$; und es ist $X = \mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ [wegen I, Satz 4.1, (4)]. Aus I, Satz 4.1, (1) folgt, daß $X = \mathfrak{F} \mathfrak{N} X$ eine Hallsche Untergruppe von $\mathfrak{N} X$ ist. Wäre nun p ein gemeinsamer Primteiler von $o(X)$ und $[G:X]$, so gäbe es eine p-Sylow-Untergruppe P von G derart, daß $P \cap X$ eine p-Sylow-Untergruppe von X und $1 < P \cap X < P$ ist. Aus der Nilpotenz der p-Gruppe P folgt dann die Existenz eines Elements w in $P \cap \mathfrak{N}(P \cap X)$, das nicht in $P \cap X$ liegt

Aus $1 \neq P \cap X$ und I, Lemma 2.5 folgt die Zugehörigkeit von w zu $\mathfrak{N}X$. Da X ein Hallscher Normalteiler von $\mathfrak{N}X$ ist, da weiter p ein Teiler von $o(X)$ und w ein p-Element ist, so gehört w sogar zu X und also zu $P \cap X$. Dies ist ein Widerspruch; und hieraus folgt wieder, daß X eine Hallsche Untergruppe von G ist. Damit ist die Äquivalenz von (a), (b) und (c) dargetan.

Zusatz A.6. *Ist die Komponente X der normalen Partition σ von G weder primär noch eine Hallsche Untergruppe von G, so gilt:*

(1) $[\mathfrak{N}X : X] = p$ *ist eine $o(X)$ teilende Primzahl.*

(2) $X = \mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ *wird von den Elementen aus $\mathfrak{N}X$ mit von p verschiedener Ordnung erzeugt.*

(3) *Die Menge Y der Elemente aus X mit zu p teilerfremder Ordnung ist eine Hallsche Untergruppe von G.*

(4) $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X = X \cap \mathfrak{Z}P \neq 1$ *für alle p-Sylow-Untergruppen P von $\mathfrak{N}X$.*

Beweis. Da X keine Hallsche Untergruppe von G ist, so ergibt sich aus Lemma A.5, daß X auch keine Hallsche Untergruppe von $\mathfrak{N}X$ ist, daß $X \neq \mathfrak{N}X$ und $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ keine minimale Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$ ist. Aus Kegel [Satz 2] folgt dann die Nilpotenz des Normalteilers X von $\mathfrak{N}X$, so daß $X \subseteqq \mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ ist. Mit X ist auch $\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ nicht primär; und aus I, Folgerung 2.3 ergibt sich, daß $\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ ganz in einer Komponente von σ enthalten ist. Diese Komponente enthält mit $\mathfrak{F}\mathfrak{N}X$ auch die Komponente X von σ. Also wird $X = \mathfrak{F}\mathfrak{N}X$. Wäre $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$, so wäre $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ sogar eine minimale Frobenius-Partition. Dies haben wir bereits als unmöglich erkannt. Also ist $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ keine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$.

Da die Komponente X von $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ ein Normalteiler von $\mathfrak{N}X$ ist, so ist $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ eine normale, nicht-einfache Partition von $\mathfrak{N}X$. Sie ist keine Frobenius-Partition und $\mathfrak{N}X$ ist nicht primär. Anwendung von I, Satz 5.1, (c) ergibt, daß $[\mathfrak{N}X : X] = p$ eine Primzahl ist, und daß X von den Elementen aus $\mathfrak{N}X$ mit von p verschiedener Ordnung erzeugt wird. Wäre p kein Teiler von $o(X)$, so wäre X eine Hallsche Untergruppe von $\mathfrak{N}X$. Dies haben wir bereits als unmöglich erkannt. Damit haben wir die Gültigkeit von (1) und (2) bewiesen.

Die Menge Y der Elemente aus X mit zu p teilerfremder Ordnung ist eine charakteristische Untergruppe der nilpotenten Gruppe X. Wäre die Primzahl q ein gemeinsamer Primteiler von $o(Y)$ und $[G : Y]$, so wäre sicherlich $q \neq p$; und die q-Sylow-Untergruppe $Q \neq 1$ von Y wäre zwar auch eine q-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}X$, sogar die Gesamtheit aller q-Elemente aus $\mathfrak{N}X$, aber keine q-Sylow-Untergruppe von G. Daraus folgt die Existenz eines Q normalisierenden, aber nicht in Q enthaltenen q-Elements w in G. Aus $1 < Q \subseteqq Y \subseteqq X$ und I, Lemma 2.5 folgt die Zugehörigkeit von w zu $\mathfrak{N}X$ und also zu Q; und aus diesem Widerspruch folgt die Gültigkeit von (3).

Da $\mathfrak{N}X/Y$ offenbar eine p-Gruppe ist, so ist $\mathfrak{N}X = YP$ und $1 = Y \cap P$ für jede p-Sylow-Untergruppe P von $\mathfrak{N}X$. Wäre $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X$ nicht in X enthalten, so gäbe es wegen $[\mathfrak{N}X : X] = p$ ein Element der Ordnung p in $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X$, das

nicht zu X gehörte, wegen I, Lemma 2.1 aber zur gleichen Komponente wie Y gehören müßte. Dies ist unmöglich; und folglich ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X \subseteq X$. Es gibt ein nicht in X enthaltenes Element t in P; und aus I, Lemma 2.1 folgt $Y \cap \mathfrak{C}t = 1$. Also ist $Y \cap \mathfrak{Z}\mathfrak{N}X = 1$, so daß $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X$ in der p-Sylow-Untergruppe $P \cap X$ der nilpotenten Gruppe X enthalten sein muß. Man folgert sofort $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X \subseteq X \cap \mathfrak{Z}P$. Da Elemente aus Y und Elemente aus $P \cap X$ miteinander vertauschbar sind, so wird $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X = X \cap \mathfrak{Z}P$. Da $X \cap P$ ein Normalteiler von P und eine p-Sylow-Untergruppe von X ist, und da p ein Teiler von $o(X)$ ist, so wird $X \cap P \neq 1$ und also $X \cap \mathfrak{Z}P \neq 1$. Damit ist auch (4) bewiesen.

FOLGERUNG A.7. *Ist X eine Komponente der normalen Partition σ von G, so gibt es höchstens einen gemeinsamen Primteiler von $o(X)$ und $[G:X]$.*

BEWEIS. Unsere Behauptung ist trivialerweise richtig, wenn X primär ist, und ebenfalls wenn X eine Hallsche Untergruppe von G ist. Ist aber X weder eine Primärgruppe noch eine Hallsche Untergruppe von G, so folgt aus Zusatz A.6, daß $[\mathfrak{N}X:X]$ eine Primzahl p ist, die $o(X)$ teilt, und daß die Elemente aus X mit zu p teilerfremder Ordnung eine Hallsche Untergruppe Y von G bilden. Ist also q ein von p verschiedener Primteiler von $o(X)$, so ist q ein Primteiler von $o(Y)$ und Y enthält eine volle q-Sylow-Untergruppe von G, so daß q kein Teiler von $[G:Y]$ und a fortiori auch kein Teiler von $[G:X]$ ist. Also ist in diesem Falle p der einzige gemeinsame Primteiler von $o(X)$ und $[G:X]$.

LEMMA A.8. *Besitzt die p-Gruppe G eine zyklische Faktorgruppe, deren Ordnung ein Vielfaches von p^2 ist, so ist die triviale Partition die einzige Partition von G.*

BEWEIS. Gäbe es überhaupt eine nicht-triviale Partition von G, so gäbe es nach einer Kegelschen Bemerkung auch eine normale, nicht-triviale Partition σ von G; vgl. I, Beweis von Satz 4.7. Nach Voraussetzung gibt es einen Normalteiler K von G mit zyklischer Faktorgruppe G/K, deren Ordnung $[G:K]$ ein Vielfaches von p^2 ist. Es sei E eine erzeugende Restklasse von G/K. Dann ist p^2 ein Teiler von $o(e)$ für jedes e aus E. Aus I, Zusatz 5.6 folgt nun die Existenz einer Komponente S von σ, die alle Elemente aus G mit von p verschiedener Ordnung enthält. Offenbar ist E eine Teilmenge von S. Da aber $G/K = \{E\}$ ist, so folgt $G = S$. Also ist σ trivial.

SATZ A.9. *Besitzt die Gruppe G eine zyklische Faktorgruppe, deren Ordnung weder 1 noch eine Primzahl ist, so sind die normalen, nicht trivialen Partitionen von G Frobenius-Partitionen von G.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert ein Normalteiler $K \neq G$ von G mit zyklischer Faktorgruppe G/K, deren Ordnung $[G:K]$ keine Primzahl ist. Sei weiter σ eine normale Partition von G.

Sei zunächst G/K eine p-Gruppe. Dann gibt es in einer G/K erzeugenden Restklasse ein p-Element a; und dieses liegt in einer p-Sylow-Untergruppe S von G. Dann wird $G = KS$, so daß $G/K \cong S/(K \cap S)$ eine zyklische p-Gruppe ist, deren Ordnung, da weder 1 noch eine Primzahl, ein Vielfaches von p^2 ist. Anwendung von Lemma A.8 zeigt, daß die normale Partition $\sigma \cap S$ von S

trivial ist. Folglich ist S ganz in einer Komponente T von σ enthalten; und es gilt offenbar $G = KS = KT$.

Sei weiter G/K nicht primär. Da $[G:K]$ weder 1 noch eine Primzahl ist, so ist $[G:K]$ durch wenigstens zwei verschiedene Primzahlen teilbar. Ist e ein G modulo K erzeugendes Element, so ist auch $o(e)$ durch wenigstens zwei verschiedene Primzahlen teilbar. Sei E die eindeutig bestimmte Komponente von σ, die e enthält. Dann ist E gewiß nicht primär. Ist E keine Hallsche Untergruppe von G, so ergibt sich aus Zusatz A.6, daß $[\mathfrak{N}E:E] = p$ eine Primzahl ist, und daß die Elemente aus E mit zu p teilerfremder Ordnung eine Hallsche Untergruppe F von G bilden. Wäre F eine Untergruppe von K, so würde aus $G/K \cong E/(E \cap K)$ folgen, daß G/K als epimorphes Bild der p-Gruppe E/F selbst primär ist. Dies ist aber im gegenwärtigen Falle ausgeschlossen. Zusammenfassend haben wir folgendes gezeigt:

Es gibt eine Komponente X von σ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $G = KX$;

(b) X enthält eine Hallsche Untergruppe Y von G, die nicht in K enthalten ist.

Insbesondere existiert ein gemeinsamer Primteiler r von $o(Y)$ und $[G:K]$. Da G/K zyklisch ist, so gibt es auch einen K enthaltenden Normalteiler R von G derart, daß G/R eine von 1 verschiedene, zyklische r-Gruppe ist. Dann ist $G = KX = RY$ und X enthält mit Y eine r-Sylow-Untergruppe von G. Anwendung von Lemma A.3 ergibt $X = \mathfrak{N}X$, so daß σ entweder trivial oder eine Frobenius-Partition von G ist.

Bemerkung A.10. Es ist leicht, Beispiele von Gruppen G zu konstruieren, die sowohl Frobenius-Partitionen wie auch zyklische Faktorgruppen besitzen, deren Ordnung weder 1 noch eine Primzahl ist.

Satz A.11. *Ist p ein Primteiler von $o(G)$, sind, falls $p = 2$ ist, die 2-Sylow-Untergruppen von G dedekindsch, existiert weiter eine nicht-triviale Partition von G, so sind die folgenden Eigenschaften von G und p äquivalent:*

(a) *G ist p'-abgeschlossen.*

(b) *Es gibt eine von 1 verschiedene p-Faktorgruppe von G.*

(c) *$P \not\subseteq (\mathfrak{N}P)'$ für jede p-Sylow-Untergruppe P von G.*

Es sei zunächst daran erinnert, daß eine Gruppe G dann und nur dann *p'-abgeschlossen* ist, wenn die Menge der Elemente aus G mit zu p teilerfremder Ordnung eine Untergruppe von G ist. Diese Eigenschaft ist offenbar gleichwertig mit der Existenz eines Normalteilers mit p-Faktorgruppe und zu p teilerfremder Ordnung. Weiter nennen wir Gruppen *dedekindsch*, wenn alle ihre Untergruppen Normalteiler sind.

Beweis. Aus der Existenz einer nicht trivialen Partition von G folgt nach einer Kegelschen Bemerkung die Existenz einer normalen, nicht-trivialen Partition σ von G; vgl. I, Beweis von Satz 4.7.

Ist zunächst G eine p'-abgeschlossene Gruppe, so gibt es einen Normalteiler K mit p-Faktorgruppe G/K und zu p teilerfremder Ordnung. Da aber

$o(G)$ durch p teilbar ist, so ist auch $[G:K]$ durch p teilbar, so daß G/K eine von 1 verschiedene p-Faktorgruppe von G ist. Also folgt (b) aus (a).

Gilt weiter (b), so ergibt sich aus den wohlbekannten Eigenschaften der p-Gruppen die Existenz eines Normalteilers K von G mit von 1 verschiedener abelscher p-Faktorgruppe. Insbesondere ist dann $G' \leqq K$. Ist P eine p-Sylow-Untergruppe von G, so ist auch $G = KP$; und da $K \neq G$ ist, so ist P nicht in K enthalten. Also wird

$$P \cap (\mathfrak{N}P)' \leqq P \cap G' \leqq P \cap K < P,$$

womit wir (c) aus (b) hergeleitet haben.

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (c) an. Der Hauptschritt unseres Beweises ist der Nachweis der Gültigkeit folgender Aussage:

(+) *Ist R ein Normalteiler einer p-Sylow-Untergruppe von G, so ist $\mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ eine p-Gruppe.*

Diese Behauptung ist sicher richtig, wenn $R = 1$ ist. Sie ist ebenfalls sicherlich richtig, wenn $\mathfrak{N}R$ nilpotent ist, da ja in nilpotenten Gruppen Elemente teilerfremder Ordnung vertauschbar sind. Wir nehmen also im folgenden an, daß $R \neq 1$ und $\mathfrak{N}R$ nicht nilpotent ist.

Ist $\sigma \cap \mathfrak{N}R$ trivial, so ist $\mathfrak{N}R$ in einer Komponente F von σ enthalten. Mit $\mathfrak{N}R$ ist auch F nicht nilpotent; und aus einem Kegelschen Satz folgt die Normalisatorgleichheit von F; vgl. KEGEL [Satz 2]. Dann ist σ eine Frobenius-Partition von G; und aus I, Satz 4.1, (5) ergibt sich, daß eine p-Sylow-Untergruppe von F eine und nur eine Untergruppe der Ordnung p enthält. Dasselbe gilt natürlich auch von $\mathfrak{N}R$. Da aber der p-Normalteiler $R \neq 1$ von $\mathfrak{N}R$ in jeder p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}R$ enthalten ist, so besitzt $\mathfrak{N}R$ eine und nur eine Untergruppe E der Ordnung p; und diese charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}R$ ist in R enthalten.

Da R Normalteiler einer p-Sylow-Untergruppe von G ist, so enthält $\mathfrak{N}R$ volle p-Sylow-Untergruppen von G und die p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}R$ sind auch p-Sylow-Untergruppen von G. Sei P eine R enthaltende und in $\mathfrak{N}R$ enthaltene p-Sylow-Untergruppe von G.

Wir erledigen zunächst den Fall $p = 2$. Dann ist P eine dedekindsche Gruppe, die ein und nur ein Element der Ordnung 2 enthält. Eine solche ist entweder zyklisch oder eine Quaternionengruppe; vgl. ZASSENHAUS [p. 123, Satz]. Ist R zyklisch, so ist die Gruppe aller Automorphismen von R eine 2-Gruppe, so daß auch $\mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ eine 2-Gruppe ist. Ist R nicht zyklisch, so ist auch P nicht zyklisch. Dann ist P eine Quaternionengruppe. Die einzige nicht-zyklische Untergruppe von P ist dann P selbst, so daß $R = P$ ist. Aus (c) folgt, daß P nicht in $(\mathfrak{N}P)'$ enthalten ist, so daß $[\mathfrak{N}P:(\mathfrak{N}P)']$ gerade ist und es einen Normalteiler J von $\mathfrak{N}P$ mit Index $[\mathfrak{N}P:J] = 2$ gibt. Dann ist auch $[P:P \cap J] = 2$; und da P eine Quaternionengruppe ist, so ist der Normalteiler $P \cap J$ von $\mathfrak{N}P$ zyklisch der Ordnung 4. Alle Elemente aus $\mathfrak{N}P$ induzieren also in P Automorphismen, die eine zyklische Untergruppe der Ordnung 4 invariant lassen; und derartige Automorphismen der Quaternionen-

gruppe haben die Ordnung 1 oder 2. Also haben auch alle Elemente aus $\mathfrak{N}P/\mathfrak{C}P = \mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ die Ordnung 1 oder 2, so daß $\mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ eine 2-Gruppe ist.

Sei weiter p ungerade. Da P eine und nur eine Untergruppe der Ordnung p enthält, so ist P nach einem Burnsideschen Resultat zyklisch; vgl. Burnside [p. 131, Theorem V]. Da alle Untergruppen einer zyklischen Gruppe charakteristische Untergruppen sind, so wird die Untergruppe R von P von jedem Element aus dem Normalisator von P normalisiert. Also ist $\mathfrak{N}P \leqq \mathfrak{N}R$. Da P zyklisch ist, so gilt $P \leqq \mathfrak{C}R$; und da P eine p-Sylow-Untergruppe von G, $\mathfrak{N}R$ und $\mathfrak{C}R$ ist, so folgt aus dem Frattinischen Schluß sogar $\mathfrak{N}R = (\mathfrak{N}P)(\mathfrak{C}R)$; vgl. etwa Baer [1; p. 117, Lemma 1]. Wäre nun $\mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ keine p-Gruppe, so wäre auch die zu $\mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{N}P/(\mathfrak{N}P \cap \mathfrak{C}R)$ keine p-Gruppe; und es gäbe also ein Element A aus $\mathfrak{N}P/(\mathfrak{N}P \cap \mathfrak{C}R)$, dessen Ordnung $o(A)$ eine von p verschiedene Primzahl q ist. Dann enthält A ein q-Element a; und dieses q-Element a liegt in $\mathfrak{N}P$, aber nicht in $\mathfrak{C}R$. Aus (c) folgt $P \not\leqq (\mathfrak{N}P)'$, so daß $[\mathfrak{N}P : (\mathfrak{N}P)']$ durch p teilbar ist. Dann besitzt $\mathfrak{N}P$ einen Normalteiler J mit $[\mathfrak{N}P : J] = p$. Das q-Element a aus $\mathfrak{N}P$ liegt dann in J. Ist b ein erzeugendes Element der zyklischen Gruppe P, so liegt b wegen $\mathfrak{N}P = PJ$ nicht in J, während der Kommutator $a \circ b$ in $P \cap J < P$ liegt. Daraus folgt aber bekanntlich, daß der von a in $P = \{b\}$ induzierte Automorphismus ein p-Automorphismus ist; und da a ein q-Element mit $q \neq p$ ist, so liegt a sogar in $\mathfrak{C}R$. Dies ist ein Widerspruch, aus dem wieder folgt, daß $\mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ eine p-Gruppe ist. Wir können und wollen also im folgenden annehmen, daß $\sigma \cap \mathfrak{N}R$ nicht trivial ist.

Wäre $\mathfrak{N}R$ isomorph der symmetrischen Gruppe des Grades 4, so wäre der primäre Normalteiler $R \neq 1$ von $\mathfrak{N}R$ notwendig elementar-abelsch der Ordnung 4; und es wäre $p = 2$. Die 2-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}R$ haben die Ordnung 8 und sind weder abelsch noch Quaternionengruppen, also nicht dedekindsch. Folglich sind die 2-Sylow-Untergruppen von G auch nicht dedekindsch, was unseren Voraussetzungen widerspricht. Mithin ist $\mathfrak{N}R$ nicht isomorph der symmetrischen Gruppe des Grades 4. Da aber $\mathfrak{N}R$ den p-Normalteiler $R \neq 1$ besitzt, und da die normale Partition $\sigma \cap \mathfrak{N}R$ nicht trivial ist, so ergibt sich aus II, Satz A die Nicht-Einfachheit von $\sigma \cap \mathfrak{N}R$.

Wäre $\sigma \cap \mathfrak{N}R$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}R$, so folgte aus I, Satz 4.1, (1) und (5), daß $\mathfrak{F}\mathfrak{N}R$ eine eigentliche, Hallsche, charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}R$ ist, und daß $\mathfrak{F}\mathfrak{N}R \cap \mathfrak{C}t = 1$ für nicht in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}R$ enthaltene Elemente t aus $\mathfrak{N}R$ gilt. Natürlich ist $1 < R \leqq \mathfrak{F}\mathfrak{N}R$. Da p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{F}\mathfrak{N}R$ auch p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}R$ sind, und da p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}R$ auch solche von G sind, so ist die p-Sylow-Untergruppe P der nilpotenten Gruppe $\mathfrak{F}\mathfrak{N}R$ auch eine p-Sylow-Untergruppe von G. Als charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{F}\mathfrak{N}R$ ist P auch eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}R$, so daß $\mathfrak{N}R \leqq \mathfrak{N}P$ ist. Aus (c) folgt, daß P nicht in $(\mathfrak{N}P)'$ enthalten ist. Also ist p ein Teiler von $[\mathfrak{N}P : (\mathfrak{N}P)']$; und hieraus folgt die Existenz eines Normalteilers J von $\mathfrak{N}P$ mit $[\mathfrak{N}P : J] = p$. Dann ist $\mathfrak{N}P = PJ \neq J$. Also ist $J^* = J \cap \mathfrak{N}R$ ein Normalteiler von $\mathfrak{N}R$, der P nicht enthält, aber $\mathfrak{N}R = PJ^*$ erfüllt. Da $\mathfrak{N}R$ nicht nilpotent ist, so ist $\mathfrak{N}R \neq P$; und damit haben wir

$\mathfrak{N}R$ als Produkt eigentlicher Normalteiler P und J^* dargestellt. Es gibt ein Element t in J^*, das nicht in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}R$ liegt, da sonst $\mathfrak{N}R$ nilpotent wäre; und für dieses Element t gilt wie oben bemerkt $P \cap \mathfrak{C}t = 1$. Dies widerspricht aber Hilfssatz A.2; und aus diesem Widerspruch folgt, daß $\sigma \cap \mathfrak{N}R$ keine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}R$ ist.

Wir haben also gezeigt, daß $\mathfrak{N}R$ nicht nilpotent und insbesondere auch nicht primär ist, und daß die Partition $\sigma \cap \mathfrak{N}R$ von $\mathfrak{N}R$ normal und nicht-einfach, aber keine Frobenius-Partition ist. Anwendung von I, Satz 5.1, (c) ergibt die Existenz einer Komponente K von $\sigma \cap \mathfrak{N}R$, die ein Normalteiler von $\mathfrak{N}R$ mit Primzahlindex $[\mathfrak{N}R : K]$ ist. Da die Komponente K als echter Normalteiler von $\mathfrak{N}R$ nicht normalisatorgleich ist, so ist sie nach einem Kegelschen Satz nilpotent; vgl. KEGEL [Satz 2]. Da R ein primärer Normalteiler von $\mathfrak{N}R$ ist, so ist KR ein nilpotenter Normalteiler von $\mathfrak{N}R$. Da $\mathfrak{N}R$ nicht nilpotent ist, so ist $KR \neq \mathfrak{N}R$; und da $[\mathfrak{N}R : K]$ eine Primzahl ist, so wird $KR = K$, d.h. $R \leqq K$.

Ist P eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}R$, so ist $R \leqq P$, da ja R ein p-Normalteiler von $\mathfrak{N}R$ ist. Da R Normalteiler einer p-Sylow-Untergruppe von G ist, so enthält $\mathfrak{N}R$ eine p-Sylow-Untergruppe von G und jede p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}R$, insbesondere P, ist eine p-Sylow-Untergruppe von G. Wäre P in K enthalten, so wäre P als p-Sylow-Untergruppe des nilpotenten Normalteilers K von $\mathfrak{N}R$ selbst ein Normalteiler von $\mathfrak{N}R$, woraus $\mathfrak{N}R \leqq \mathfrak{N}P$ folgt. Es ist also $[\mathfrak{N}R : K] = q \neq p$; und es gibt in $\mathfrak{N}R$ ein nicht in K enthaltenes Element t der Primzahlordnung q. Aus I, Lemma 2.1 folgt dann sofort $P \cap \mathfrak{C}t = 1$; und hieraus folgt, daß $o(P)$ die Anzahl der Kommutatoren der Form $x \circ t$ mit x in P ist. Also wird $P = P \circ t \leqq (\mathfrak{N}R)' \leqq (\mathfrak{N}P)'$; und dies widerspricht (c). Folglich ist P nicht in K enthalten und es wird $[\mathfrak{N}R : K] = p$ und $\mathfrak{N}R = KP$. Da Elemente teilerfremder Ordnung in der nilpotenten Gruppe K vertauschbar sind, so ist der Normalteiler R von K mit allen Elementen aus K vertauschbar, deren Ordnung zu p teilerfremd ist. Aus $\mathfrak{N}R = KP$ folgt dann $\mathfrak{N}R = P \cdot \mathfrak{C}R$. Also ist $\mathfrak{N}R/\mathfrak{C}R$ eine p-Gruppe; und damit ist $(+)$ voll bewiesen.

Um den Beweis des Satzes zu beenden, unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem p grade oder ungrade ist.

FALL 1: $p \neq 2$. Dann folgt aus $(+)$ und JOHN THOMPSONS berühmtem Kriterium die p'-Abgeschlossenheit von G; vgl. THOMPSON [p. 332, Theorem A].

FALL 2: $p = 2$. Dann sind die 2-Sylow-Untergruppen von G dedekindsch; und alle 2-Untergruppen von G sind Normalteiler der sie enthaltenden 2-Sylow-Untergruppen. Aus $(+)$ folgt also, daß $\mathfrak{N}T/\mathfrak{C}T$ für jede 2-Untergruppe T von G eine 2-Gruppe ist. Die 2'-Abgeschlossenheit folgt jetzt aus einem Satz von FROBENIUS; vgl. etwa M. HALL, JR. [p. 217, Theorem 14.4.7].

Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

BEMERKUNG A.12. Es gibt zahlreiche Gruppen mit von 1 verschiedenen p-Faktorgruppen, die nicht p'-abgeschlossen sind; man braucht ja nur das direkte Produkt einer p-Gruppe und einer nicht p'-abgeschlossenen Gruppe

zu bilden. Es ist also klar, daß die Bedingung (a) des Satzes A.11 viel schärfer ist als (b).

Bemerkung A.13. Ist G eine Gruppe mit abelschen p-Sylow-Untergruppen, so folgt aus (c) und dem Ersten Grünschen Satz die Existenz einer von 1 verschiedenen p-Faktorgruppe von G, d.h. (b); vgl. Zassenhaus [p. 135, Satz 5]. Doch hat Herr Otto Kegel darauf hingewiesen, daß manche Gruppen gebrochen-linearer Transformationen Beispiele einfacher Gruppen liefern, die normale, nicht-triviale Partitionen besitzen und der Bedingung (c) für $p=2$ genügen; vgl. etwa Burnside, p. 440/41. Dies zeigt, daß im allgemeinen die Bedingung (c) schwächer als (b) ist, und daß die Forderung unentbehrlich ist, daß die 2-Sylow-Untergruppen dedekindsch sein sollen.

Zur bequemen Formulierung unseres nächsten Resultats sei an das Endglied der absteigenden Zentrenkette der Gruppe G erinnert, das wir aus heute naheliegenden Gründen als *Ko-Hyperzentrum* $\mathfrak{K}G$ bezeichnen wollen. Dieses ist genau der Durchschnitt aller Normalteiler mit nilpotenter Faktorgruppe und es ist eine charakteristische Untergruppe mit nilpotenter Faktorgruppe.

Folgerung A.14. *Sind die 2-Sylow-Untergruppen von G dedekindsch, falls $[G:\mathfrak{K}G]$ gerade ist, besitzt G eine nicht-triviale Partition, so ist $\mathfrak{K}G$ eine Hallsche Untergruppe von G.*

Beweis. Ist p ein Primteiler von $[G:\mathfrak{K}G]$, so folgt aus der Nilpotenz von $G/\mathfrak{K}G$ die Existenz einer von 1 verschiedenen p-Faktorgruppe von G. Aus Satz A.11 folgt also die p'-Abgeschlossenheit von G. Mithin existiert ein Normalteiler P von G mit $(o(P), p)=1$ und p-Faktorgruppe G/P. Aus der Nilpotenz von G/P folgt $\mathfrak{K}G \subseteq P$, so daß $(o(\mathfrak{K}G), p)=1$ ist. Also ist $\mathfrak{K}G$ eine Hallsche Untergruppe von G.

Hilfssatz A.15. *Ist G eine 2-Gruppe, gibt es in G zwei nicht vertauschbare Elemente, deren Ordnungen von 2 verschieden sind, so besitzt G nur die triviale Partition.*

Beweis. Sei Q die Untergruppe von G, die von den Elementen mit von 2 verschiedener Ordnung erzeugt wird. Nach Voraussetzung ist Q nicht abelsch.

Gäbe es eine nicht-triviale Partition von G, so gäbe es nach einer Kegelschen Bemerkung auch eine normale, nicht-triviale Partition σ von G; vgl. I, Beweis von Satz 4.7. Da G eine 2-Gruppe mit $G^2 \neq 1$ ist [wegen $Q' \neq 1$], so können wir I, Zusatz 5.6 anwenden. Also gibt es eine Q [und $\mathfrak{Z}G$] enthaltende Komponente W von σ, die ein Normalteiler von G ist. Da σ nicht trivial ist, so ist $W \neq G$. Es gibt also ein nicht in W gelegenes Element t in G. Ist w ein Element aus W, so ist auch wt nicht in W enthalten. Nicht in W enthaltene Elemente aus G liegen nicht in Q und haben also die Ordnung 2. Also gilt:

$$t^{-1} w t = w^{-1} (w t)^2 = w^{-1} \quad \text{für jedes } w \text{ aus } W.$$

Folglich ist die Abbildung $w \to w^{-1}$ ein Automorphismus von W; und hieraus folgt die Kommutativität von W und also auch die der Untergruppe Q von W. Dies widerspricht unserer Voraussetzung, so daß die triviale Partition die einzige Partition von G ist.

LEMMA A.16. *Die normale, nicht-triviale Partition σ der Gruppe G ist dann und nur dann nicht einfach, wenn entweder G primär oder $\mathfrak{F}G$ eine eigentliche σ-zulässige Untergruppe von G ist.*

BEWEIS. Ist $\mathfrak{F}G$ eine eigentliche σ-zulässige Untergruppe von G, so ist σ nicht einfach, da ja $\mathfrak{F}G$ eine charakteristische Untergruppe von G ist. Ist G primär, so enthält $\mathfrak{Z}G$ ein Element $z \neq 1$; und die z enthaltende Komponente von σ ist wegen I, Lemma 2.5 ein Normalteiler von G, so daß σ wieder nicht einfach ist. Damit ist das Hinreichen unserer Bedingung erwiesen.

Sei umgekehrt σ nicht einfach. Ist zunächst $G = \mathfrak{F}G$ nilpotent, so ist G primar, da σ nicht trivial ist, wie aus I, Bemerkung 2.4 folgt. Ist weiter $G \neq \mathfrak{F}G$, so ist G nicht primär. Ist σ eine Frobenius-Partition von G, so ist $\mathfrak{F}G$ wegen I, Satz 4.1, (1) eine eigentliche σ-zulässige Untergruppe von G. Ist aber σ keine Frobenius-Partition von G, so folgt aus I, Satz 5.1, (c) die Existenz eines Normalteilers K von G mit Primzahlindex $[G:K] = p$, der eine Komponente von σ ist. Aus einem Satz von KEGEL folgt die Nilpotenz von K; vgl. KEGEL [Satz 2]. Der nilpotente Normalteiler K von G liegt in $\mathfrak{F}G$ und aus $K \leqq \mathfrak{F}G < G$ sowie $[G:K] = p$ folgt $K = \mathfrak{F}G$, so daß die Komponente $\mathfrak{F}G$ von σ eine eigentliche σ-zulässige Untergruppe von G ist. Damit ist auch die Notwendigkeit unserer Bedingung erwiesen.

LEMMA A.17. *Die normale, nicht-triviale Partition σ der Gruppe G ist dann und nur dann weder einfach noch eine Frobenius-Partition, wenn $\mathfrak{Z}G \neq 1$ ist.*

BEWEIS. Ist zunächst $\mathfrak{Z}G \neq 1$, so gibt es wenigstens eine Komponente S von σ, die ein von 1 verschiedenes Zentrumselement enthält. Anwendung von I, Lemma 2.5 ergibt dann, daß S ein Normalteiler von G und σ also nicht einfach ist. Wäre σ eine Frobenius-Partition von G, so wäre $\mathfrak{F}G$ von 1 und G verschieden; und es würde $1 = \mathfrak{F}G \cap \mathfrak{C}g$ für jedes nicht in $\mathfrak{F}G$ enthaltene Element g aus G gelten [I, Satz 4.1, (1) und (5)]. Dann wäre aber offenbar $\mathfrak{Z}G = 1$; und aus diesem Widerspruch folgt, daß σ keine Frobenius-Partition ist.

Ist umgekehrt σ weder einfach noch eine Frobenius-Partition, so ist gewiß dann $\mathfrak{Z}G \neq 1$, wenn G primär ist. Ist aber G nicht primär, so folgt aus I, Satz 5.1, (c) die Existenz einer Komponente T von σ, die ein Normalteiler von G mit Primzahlindex $[G:T] = p$ ist. Aus Lemma A.5 folgt, daß T keine Hallsche Untergruppe von G und also p ein Teiler von $o(T)$ ist; und aus einem Kegelschen Satz folgt die Nilpotenz von T; vgl. KEGEL [Satz 2]. Also ist $T = A \otimes B$ das direkte Produkt einer von 1 verschiedenen p-Gruppe A und einer Gruppe B mit $(o(B), p) = 1$. Ist P eine p-Sylow-Untergruppe von G, so ist $A = T \cap P$ und $G = PB$. Da A ein Normalteiler von P ist und von B zentralisiert wird, so ist $1 < A \cap \mathfrak{Z}P \leqq \mathfrak{Z}G$, womit auch die Notwendigkeit unserer Bedingung gezeigt ist.

ZUSATZ A.18. *Ist die normale Partition σ der Gruppe G frei von normalisatorgleichen Komponenten, so ist dann und nur dann $\mathfrak{C}g$ für jedes $g \neq 1$ aus G nilpotent, wenn für jede Komponente X von σ gilt:*

(*) *Entweder ist $\mathfrak{N}X$ primär oder $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ ist eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß die Freiheit von normalisatorgleichen Komponenten von σ äquivalent damit ist, daß σ weder trivial noch eine Frobenius-Partition von G ist; und daß aus der Freiheit von normalisatorgleichen Komponenten nach einem Kegelschen Satz die Nilpotenz aller Komponenten von σ folgt; vgl. Kegel [Satz 2].

Wir nehmen zunächst an, daß $\mathfrak{C}g$ für jedes $g \neq 1$ aus G nilpotent ist; und wir betrachten eine Komponente X von σ mit nicht-primärem Normalisator $\mathfrak{N}X$. Da X sowohl ein Normalteiler von $\mathfrak{N}X$ wie auch eine Komponente von σ und $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ ist, so ist $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ wegen $X \neq \mathfrak{N}X$ eine normale und nicht-einfache Partition von $\mathfrak{N}X$. Wäre $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ keine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$, so würde $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X \neq 1$ aus Lemma A.17 folgen. Ist $z \neq 1$ ein Element aus $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X$, so ist $\mathfrak{N}X \subseteq \mathfrak{C}z$; und aus unserer Voraussetzung folgt die Nilpotenz von $\mathfrak{C}z$ und also auch die von $\mathfrak{N}X$. Da $\mathfrak{N}X$ nicht primär ist, so folgt aus I, Folgerung 2.3, daß $\mathfrak{N}X$ in einer Komponente von σ enthalten ist, die dann notwendig mit der in $\mathfrak{N}X$ enthaltenen Komponente X zusammenfällt. Daraus ergibt sich aber der Widerspruch $X = \mathfrak{N}X$; und damit haben wir die Notwendigkeit der Bedingung (*) dargetan.

Sei umgekehrt die Bedingung (*) von σ erfüllt. Ist dann $g \neq 1$ irgendein Element aus G, so liegt g in einer und nur einer Komponente X von σ; und aus I, Lemma 2.5 folgt $\mathfrak{C}g \subseteq \mathfrak{N}X$. Ist $\mathfrak{N}X$ primär, so ist gewiß $\mathfrak{C}g$ nilpotent. Ist aber $\mathfrak{N}X$ nicht primär, so ergibt sich aus (*), daß $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$ ist. Aus I, Satz 4.1 ergibt sich nun die Alternative:

$$\text{entweder ist } \mathfrak{C}g \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}X \text{ oder aber } \mathfrak{C}g \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}X = 1;$$

und im zweiten Fall ergibt sich wieder aus I, Satz 4.1, daß $\mathfrak{C}g$ ganz in einer normalisatorgleichen Komponente von $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ enthalten ist, daß also $\mathfrak{C}g$ in beiden Fällen nilpotent ist.

Satz A.19. *Ist σ eine normale, nicht-triviale Partition der Gruppe G, sind die Komponenten von σ nilpotent, ist p ein Primteiler von $o(G)$, folgt schließlich aus $p = 2$, daß keine Untergruppe von G der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph ist, so gilt:*

(a) *Dann und nur dann gibt es Paare verschiedener p-Sylow-Untergruppen mit nicht-trivialem Durchschnitt, wenn es eine Komponente X von σ derart gibt, daß p ein gemeinsamer Teiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X : X]$ ist, X aber keine p-Gruppe ist.*

(b) *Sind die Durchschnitte verschiedener p-Sylow-Untergruppen trivial, obgleich die p-Sylow-Untergruppen nicht in Komponenten von σ enthalten sind, so sind die Komponenten von σ entweder p-Gruppen oder von zu p teilerfremder Ordnung.*

(c) *Dann und nur dann sind die Durchschnitte verschiedener p-Sylow-Untergruppen trivial, wenn entweder G eine p-Gruppe ist oder es eine normale, nicht-triviale Verschmelzung σ^* von σ derart gibt, daß p-Sylow-Untergruppen von G in Komponenten von σ^* enthalten sind.*

BEWEIS. Gibt es Paare verschiedener p-Sylow-Untergruppen mit nichttrivialem Durchschnitt, so gibt es auch ein Paar verschiedener p-Sylow-Untergruppen $A \neq B$ mit maximalem Durchschnitt $D = A \cap B \neq 1$. Dann ist $D \subset A$ und $D \subset B$; und aus den wohlbekannten Eigenschaften der p-Gruppen ergibt sich $D \subset A \cap \mathfrak{N}D$ und $D \subset B \cap \mathfrak{N}D$. Wäre $A \cap \mathfrak{N}D$ keine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}D$, so gäbe es eine $A \cap \mathfrak{N}D$ enthaltende p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}D$, die wiederum in einer p-Sylow-Untergruppe A^* von G enthalten ist. Natürlich ist dann $A^* \cap \mathfrak{N}D$ eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}D$; und es gilt, da ja $A \cap \mathfrak{N}D$ keine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}D$ ist,

$$D \subset A \cap \mathfrak{N}D \subset A^* \cap \mathfrak{N}D \quad \text{und} \quad D \subset A \cap A^*.$$

Aus der Maximalität von D und der zweiten Ungleichung folgt $A = A^*$; und dies ist mit der ersten Ungleichung unverträglich. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß $A \cap \mathfrak{N}D$ eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}D$ ist; und ebenso sieht man ein, daß $B \cap \mathfrak{N}D$ eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}D$ ist. Aus $D \subset A \cap \mathfrak{N}D$ und $D \subset B \cap \mathfrak{N}D$ zusammen mit $D = A \cap B$ folgt schließlich die Verschiedenheit dieser beiden p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}D$. Da $D \neq 1$ ein p-Normalteiler von $\mathfrak{N}D$ ist, so ist $\mathfrak{F}\mathfrak{N}D$ kein Hallscher Normalteiler von $\mathfrak{N}D$; und zwar ist p ein gemeinsamer Primteiler von $o(\mathfrak{F}\mathfrak{N}D)$ und $[\mathfrak{N}D : \mathfrak{F}\mathfrak{N}D]$.

Da $\mathfrak{N}D$ nicht nilpotent ist, während alle Komponenten von σ nilpotent sind, so ist $\mathfrak{N}D$ in keiner Komponente von σ enthalten und $\sigma \cap \mathfrak{N}D$ ist also eine normale, nicht-triviale Partition von $\mathfrak{N}D$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{N}D$ nicht der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph, wenn $p = 2$ ist; und es ergibt sich also aus II, Satz A die Nicht-Einfachheit von $\sigma \cap \mathfrak{N}D$. Da $\mathfrak{F}\mathfrak{N}D$ keine Hallsche Untergruppe von $\mathfrak{N}D$ ist, so folgt aus I, Satz 4.1, (1), daß $\sigma \cap \mathfrak{N}D$ keine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}D$ ist. Anwendung von I, Satz 5.1, (c) ergibt die Existenz einer Komponente W von $\sigma \cap \mathfrak{N}D$, die ein Normalteiler von $\mathfrak{N}D$ ist, und deren Index $[\mathfrak{N}D : W]$ eine $o(W)$ teilende Primzahl q ist. Mit den Komponenten von σ ist auch W nilpotent. Wäre $q \neq p$, so wäre die p-Sylow-Untergruppe von W ein Normalteiler von $\mathfrak{N}D$ und eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}D$ und dies ist unmöglich. Also ist $p = q = [\mathfrak{N}D : W]$ ein Teiler von $o(W)$.

Die Komponente W von $\sigma \cap \mathfrak{N}D$ liegt in einer und nur einer Komponente V von σ. Da W von $\mathfrak{N}D$ normalisiert wird, so folgt aus I, Lemma 2.5, daß $\mathfrak{N}D \leqq \mathfrak{N}V$ ist. Aus $W = V \cap \mathfrak{N}D$ und $[\mathfrak{N}D : W] = p$ folgt weiter, daß p ein gemeinsamer Teiler von $[\mathfrak{N}V : V]$ und $o(V)$ ist. Wäre V eine p-Gruppe, so wäre auch W und wegen $[\mathfrak{N}D : W] = p$ sogar $\mathfrak{N}D$ eine p-Gruppe, was unmöglich ist. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung von (a) bewiesen.

Sei umgekehrt die Komponente X von σ keine p-Gruppe, aber p ein gemeinsamer Primteiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X : X]$. Nach Voraussetzung ist die Komponente X von σ nilpotent. Besäße $\mathfrak{N}X$ eine und nur eine p-Sylow-Untergruppe P, so wäre PX ein nilpotenter Normalteiler von $\mathfrak{N}X$. Mit X ist auch PX nicht primär; und die nilpotente, nicht primäre Untergruppe PX von G ist wegen I, Folgerung 2.3 in einer Komponente Y von σ enthalten. Dann wäre aber $X = Y$, so daß P in X enthalten und $[\mathfrak{N}X : X]$ zu p teilerfremd

wäre. Dies ist unmöglich; und $\mathfrak{N}X$ besitzt also zwei verschiedene p-Sylow-Untergruppen. Wegen Zusatz A.6, (4) ist aber $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}X \neq 1$ in allen p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ enthalten, so daß diese paarweise einen von 1 verschiedenen Durchschnitt haben. Damit ist (a) vollständig bewiesen.

Wir nehmen weiter an, daß die Durchschnitte verschiedener p-Sylow-Untergruppen trivial sind, daß aber keine p-Sylow-Untergruppe in einer Komponente von σ enthalten ist. Sei X eine Komponente von σ, deren Ordnung $o(X)$ durch p teilbar ist. Da X keine p-Sylow-Untergruppe von G enthalten kann, so ist X gewiß keine Hallsche Untergruppe von G. Wäre also X keine p-Gruppe, so würde Anwendung von Zusatz A.6 ergeben, daß

$[\mathfrak{N}X:X]$ eine $o(X)$ teilende Primzahl q ist und

die Menge Y der Elemente aus X mit zu q teilerfremder Ordnung eine Hallsche Untergruppe von G ist.

Wäre $p \neq q$, so würden Y und X also eine volle p-Sylow-Untergruppe von G enthalten, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Es ist also $p = q$ ein gemeinsamer Teiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X:X]$. Da X keine p-Gruppe ist, so ergibt unsere Aussage (a) die Existenz von verschiedenen p-Sylow-Untergruppen mit nicht-trivialem Durchschnitt; und aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß X eine p-Gruppe ist, wenn p ein Teiler von $o(X)$ ist. Damit ist auch (b) bewiesen.

Beim Beweise von (c) wollen wir o. B. d. A. annehmen, daß G keine p-Gruppe ist. Gibt es eine normale, nicht-triviale Verschmelzung σ^* von σ derart, daß p-Sylow-Untergruppen von G in Komponenten von σ^* enthalten sind, so sind die Durchschnitte verschiedener p-Sylow-Untergruppen von G sicher dann trivial, wenn Komponenten von σ^* höchstens eine p-Sylow-Untergruppe von G enthalten. Gäbe es nun eine Komponente X^* von σ^*, die zwei verschiedene p-Sylow-Untergruppen enthielte, so wäre X^* sicher nicht nilpotent; und Anwendung eines Kegelschen Satzes ergäbe $X^* = \mathfrak{N}X^*$ — vgl. Kegel [Satz 2]. Aus I, Satz 4.7, (c) würde dann folgen, daß X^* auch eine Komponente von σ wäre; und dies würde unserer Voraussetzung widersprechen, daß die Komponenten von σ nilpotent sind. Also folgt aus der Existenz von σ^*, daß verschiedene p-Sylow-Untergruppen triviale Durchschnitte haben.

Wir nehmen umgekehrt an, daß verschiedene p-Sylow-Untergruppen triviale Durchschnitte haben. Dann sind entweder die p-Sylow-Untergruppen von G in Komponenten von σ enthalten; und wir können $\sigma^* = \sigma$ wählen. Oder aber es folgt aus (b), daß Komponenten von σ entweder p-Gruppen sind oder zu p teilerfremde Ordnung haben. Sei dann σ^* die Menge von Untergruppen von G, die einerseits aus den p-Sylow-Untergruppen von G und andererseits aus den Komponenten von σ mit zu p teilerfremder Ordnung besteht. Man überzeugt sich mühelos, daß σ^* eine normale, nicht-triviale Partition von G und eine gesuchte Verschmelzung von σ ist.

Bemerkung A.20. Ist G die symmetrische Gruppe des Grades 4 und σ die Menge der nicht in $\mathfrak{S}G$ enthaltenen zyklischen Untergruppen von G, so ist σ eine normale, nicht-triviale Partition von G. Die 2-Sylow-Untergruppen

von G enthalten stets $\mathfrak{S}G$, haben also nicht-triviale Durchschnitte; es gibt aber keine Komponente X von σ derart, daß 2 ein gemeinsamer Teiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X:X]$ ist, während X keine 2-Gruppe ist. Dies zeigt die Unentbehrlichkeit unserer $p=2$ betreffenden Zusatzannahme.

B. BEWEIS DES HAUPTSATZES. Wäre die Aussage (a) des Hauptsatzes falsch, so gäbe es unter den Gegenbeispielen eines G von kleinster Ordnung. Dieser „kleinste Verbrecher" G hätte die folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathfrak{S}G$ ist einfach und nicht abelsch.

(2) $[G:\mathfrak{S}G] \neq 1$ und $\neq 2$.

(3) G besitzt eine nicht-triviale Partition.

Aus (3) folgt nach einer Kegelschen Bemerkung [vgl. I, Beweis von Satz 4.7] sogar:

(3*) G besitzt eine normale, nicht-triviale Partition σ.

Aus (1) folgt wegen Hilfssatz A.1, (a) weiter:

(4) σ ist einfach.

Aus (1) und (3*) folgt wegen Hilfssatz A.1, (b) und (c)

(5) alle Komponenten von σ sind nilpotent und $\mathfrak{F}G$ ist in keiner Komponente von σ enthalten.

Aus (1) folgt natürlich $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}G=1$. Also wird $\mathfrak{F}G \cap \mathfrak{C}\mathfrak{F}G=1$. Wäre $\mathfrak{C}\mathfrak{F}G \neq 1$, so würde diese charakteristische Untergruppe natürlich einen minimalen Normalteiler von G enthalten, der aber doch in $\mathfrak{F}G$ liegen müßte. Aus diesem Widerspruch folgt:

(6) $\mathfrak{C}\mathfrak{S}G=1$.

Angenommen $[G:\mathfrak{S}G]$ wäre eine Primzahl p. Dann würde aus (2) folgen, daß $p \neq 2$ ist. Aus (3*) und (4) folgt, daß die Komponenten von σ nicht normalisatorgleich sind [I, Satz 4.1, (1)]. Anwendung von Satz A.11 ergibt dann die p'-Abgeschlossenheit von G. Dies ist wegen (1) und $[G:\mathfrak{F}G]=p$ gleichwertig mit $(o(\mathfrak{F}G), p)=1$. Dann sind aber die p-Sylow-Untergruppen von G sämtlich zyklisch der Ordnung p und nicht in $\mathfrak{F}G$ enthalten. Sie sind als zyklische Untergruppen in Komponenten von σ enthalten; und diese Komponenten wären wegen Lemma A.3 normalisatorgleich. Da aber σ, wie schon bemerkt, keine normalisatorgleichen Komponenten besitzt, so sind wir auf einen Widerspruch geführt worden; und es gilt:

(7) $[G:\mathfrak{S}G]$ ist keine Primzahl.

Da $G/\mathfrak{S}G \neq 1$ wegen (2) ist, so folgt aus (7), daß $G/\mathfrak{S}G$ eigentliche Untergruppen besitzt. Ist $E/\mathfrak{S}G$ eine eigentliche Untergruppe von $G/\mathfrak{S}G$, so ist $\mathfrak{S}G$ wegen (1) ein minimaler Normalteiler von E und also ein direkter Faktor von $\mathfrak{S}E$; vgl. etwa SPECHT [p. 272, Satz 27]. Aus (6) folgt dann sofort

$\mathfrak{S}G = \mathfrak{S}E$. Wegen (5) ist die normale Partition $\sigma \cap E$ nicht trivial. Aus der Minimalität von G ergibt sich dann $[E : \mathfrak{S}G] = 2$. Damit haben wir gesehen, daß $[G : \mathfrak{S}G] \neq 1$ und auch nicht von Primzahlordnung ist, daß aber jede eigentliche Untergruppe von $G/\mathfrak{S}G$ die Ordnung 2 hat. Es folgt, daß $G/\mathfrak{S}G$ eine 2-Gruppe ist; also gilt:

(2*) $[G : \mathfrak{S}G] = 4$ und $G/\mathfrak{S}G$ ist entweder zyklisch oder elementar-abelsch.

Wäre nun $G/\mathfrak{S}G$ zyklisch der Ordnung 4, so würde aus Satz A.9 folgen, daß σ eine Frobenius-Partition, also wegen I, Satz 4.1, (1) nicht einfach im Widerspruch zu (4) ist. Folglich gilt:

(8) $G/\mathfrak{S}G$ ist elementar-abelsch der Ordnung 4.

Wir betrachten jetzt eine 2-Untergruppe P von G mit folgenden drei Eigenschaften:

$P \not\subseteq \mathfrak{S}G$;

P ist eine 2-Sylow-Untergruppe von $H = P \cdot \mathfrak{S}G$;

P ist in einer Komponente von σ enthalten.

Dann ist P auch in einer Komponente S der normalen Partition $\sigma \cap H$ von H enthalten. Wegen $\mathfrak{S}G \subset H$ können wir Lemma A.3 anwenden; und es wird $S = H \cap \mathfrak{N}S$. Da S in einer Komponente von σ liegt, so folgt die Nilpotenz von S aus (5); und da $\mathfrak{S}G$ wegen (1) nicht nilpotent ist, so ist auch H nicht nilpotent und folglich $S \neq H$. Also ist $\sigma \cap H$ eine Frobenius-Partition von H; und es folgt aus I, Satz 4.1, (1), daß $\mathfrak{F}H$ eine eigentliche charakteristische Untergruppe von H ist. Wegen (1) und (6) ist dann $\mathfrak{S}G = \mathfrak{S}H$ als einziger minimaler Normalteiler von H in $\mathfrak{F}H$ enthalten. Also ist $\mathfrak{S}G$ nilpotent im Widerspruch zu (1); und aus diesem Widerspruch folgt:

(9) Ist die 2-Untergruppe T von G nicht in $\mathfrak{S}G$ enthalten, aber eine 2-Sylow-Untergruppe von $T \cdot \mathfrak{S}G$, so ist T in keiner Komponente von σ enthalten.

Sei p ein ungerader Primteiler von $o(\mathfrak{S}G)$ und P eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{S}G$. Dann ist $P \neq 1$ auch eine p-Sylow-Untergruppe von G; und aus dem wohlbekannten Frattinischen Schluß folgt $G = (\mathfrak{N}P)(\mathfrak{S}G)$; vgl. etwa Baer [1; p. 117, Lemma 1]. Ist Q eine 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}P$, so wird

$$G = Q \cdot \mathfrak{S}G,$$

da ja $\mathfrak{N}P/(\mathfrak{N}P \cap \mathfrak{S}G) \cong G/\mathfrak{S}G$ eine 2-Gruppe und also $\mathfrak{N}P = Q(\mathfrak{N}P \cap \mathfrak{S}G)$ ist. Wir setzen $H = PQ$. Dann ist P ein p-Normalteiler von $H \subsetneq \mathfrak{N}P$ mit zu Q isomorpher Faktorgruppe H/P. Wir untersuchen die natürlich normale Partition $\sigma \cap H$ von H.

Wäre $\sigma \cap H$ trivial, so wäre H in einer wegen (5) nilpotenten Komponente L von σ enthalten. Die p-Sylow-Untergruppe P von G ist in H und also in L enthalten; sie ist folglich eine charakteristische Untergruppe der nilpotenten Gruppe L. Wäre Q keine 2-Sylow-Untergruppe von G, so gäbe

es ein Q normalisierendes 2-Element v, das nicht in Q liegt. Aus $1 < Q \leqq H \leqq L$ und I, Lemma 2.5 folgt, daß v zu $\mathfrak{N}L$ gehört und also auch die charakteristische Untergruppe P von L normalisiert. Also liegt v sogar in $\mathfrak{N}P$. Da Q von v normalisiert wird, so ist $Q\{v\}$ eine 2-Untergruppe von $\mathfrak{N}P$; und da Q eine 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}P$ ist, so liegt v doch in Q. Aus diesem Widerspruch folgt, daß Q eine 2-Sylow-Untergruppe von G ist. Also ist $G = Q \cdot \mathfrak{S}G$; und Q ist eine zwar nicht in $\mathfrak{S}G$, aber in einer Komponente von σ enthaltene 2-Sylow-Untergruppe von G. Dies widerspricht (9). Also ist $\sigma \cap H$ nicht trivial.

Da P ein von 1 verschiedener Hallscher Normalteiler von H und $\sigma \cap H$ normal, aber nicht trivial ist, so folgt aus II, Satz B die Nicht-Einfachheit von $\sigma \cap H$.

Angenommen, $\sigma \cap H$ wäre eine Frobenius-Partition von H. Der p-Normalteiler P von H ist sicherlich in $\mathfrak{F}H$ enthalten. Da H/P eine 2-Gruppe und $\mathfrak{F}H$ wegen I, Satz 4.1, (1) ein eigentlicher Hallscher Normalteiler von H ist, so wird $P = \mathfrak{F}H$. Als Komplement von $\mathfrak{F}H$ in H ist Q wegen I, Satz 4.1, (2) eine normalisatorgleiche Komponente von $\sigma \cap H$, die als 2-Gruppe wegen I, Satz 4.1, (5) eine und nur eine zyklische Untergruppe der Ordnung 2 enthält. Aus $G/\mathfrak{S}G \cong Q/(Q \cap \mathfrak{S}G)$ und (8) folgt, daß Q eine elementar-abelsche Faktorgruppe der Ordnung 4 besitzt und also nicht zyklisch ist. Aus einem Resultat von BURNSIDE folgt, daß Q eine verallgemeinerte Quaternionengruppe ist; vgl. BURNSIDE, p. 132, Theorem VI. Insbesondere enthält also Q ein Paar nicht vertauschbarer Elemente, deren Ordnungen durch 4 teilbar sind. Ist W eine Q enthaltende 2-Sylow-Untergruppe von G, so folgt aus Hilfssatz A.15, daß $\sigma \cap W$ die triviale Partition von W ist. Also liegt W in einer Komponente V von σ; und dies widerspricht (9) wegen $Q \leqq W \leqq V$ und $G = Q \cdot \mathfrak{S}G$. Aus diesem Widerspruch folgt, daß $\sigma \cap H$ auch keine Frobenius-Partition von H ist.

Da H gewiß nicht primär ist — denn $o(H)$ ist durch $2p$ teilbar — so können wir I, Satz 5.1, (c) anwenden. Also existiert ein Normalteiler K von H mit Primzahlindex $[H:K]$, der eine Komponente von $\sigma \cap H$ ist und der von allen Elementen aus H mit von $[H:K]$ verschiedener Ordnung erzeugt wird. Da 2 und p die einzigen Primteiler von $o(H)$ sind, so ist $[H:K] = 2$ oder p. Da H nicht primär und $\sigma \cap H$ nicht trivial ist, so ist H wegen I, Folgerung 2.3 nicht nilpotent.

Wäre $[H:K] = p$, so wäre die 2-Sylow-Untergruppe Q von H in der Komponente K von $\sigma \cap H$ enthalten. Da P ein eigentlicher Normalteiler von H mit $H = PQ$ ist, so folgt aus Lemma A.3, daß $K = \mathfrak{N}K = H \neq K$ ist. Dies ist unmöglich; und folglich ist $[H:K] = 2$. Der p-Normalteiler P von H ist also in der Komponente K von $\sigma \cap H$ enthalten, so daß P auch in der K enthaltenden Komponente L von σ enthalten ist. Aus $H = PQ$ und $P \leqq K$ und dem Dedekindschen Modulsatz folgt noch $K = P(Q \cap K)$.

Aus $G = Q \cdot \mathfrak{S}G$ und $[G:\mathfrak{S}G] = 4$ [wegen (8)] folgt, daß $o(Q)$ ein Vielfaches von 4 ist. Aus $[H:K] = 2$ folgt dann, daß 2 ein Teiler von $o(Q \cap K)$ ist. Da K von H normalisiert wird, so folgt aus I, Lemma 2.5 und $1 < K \leqq L$, daß L von H normalisiert wird. Wir bemerken, daß $K = L \cap H$ ist, und also $HL/L \cong H/(H \cap L) = H/K$ die Ordnung 2 hat. Aus $Q \cap K = Q \cap L \cap H = Q \cap L$

folgt, daß auch $o(L)$ durch 2 teilbar ist. Damit haben wir gezeigt, daß sowohl $o(L)$ wie auch das Vielfache $[\mathfrak{N}L:L]$ von $[HL:L]$ gerade sind. Da $o(L)$ gewiß durch $2p$ teilbar und L also nicht primär ist, da L eine Komponente von $\sigma \cap \mathfrak{N}L$ und $L \neq \mathfrak{N}L$ ist, so ergibt eine direkte Anwendung von I, Satz 5.1, (c), daß $[\mathfrak{N}L:L]=2$ und die wegen (5) nilpotente Komponente L von σ von den Elementen aus $\mathfrak{N}L$ erzeugt wird, deren Ordnung von 2 verschieden ist.

Wäre $\mathfrak{N}L \cap \mathfrak{S}G = L \cap \mathfrak{S}G$, so wäre $L \cap \mathfrak{S}G$ eine normalisatorgleiche Komponente der normalen und wegen (5) nicht trivialen Partition $\sigma \cap \mathfrak{S}G$. Dann wäre aber $\sigma \cap \mathfrak{S}G$ eine Frobenius-Partition der einfachen und nicht-abelschen Gruppe $\mathfrak{S}G$, was wegen I, Satz 4.1, (1) unmöglich ist. Also ist $L \cap \mathfrak{S}G \subset \mathfrak{N}L \cap \mathfrak{S}G$; und aus $[\mathfrak{N}L:L]=2$ folgt dann $[\mathfrak{N}L \cap \mathfrak{S}G : L \cap \mathfrak{S}G]=2$. Da $G = \mathfrak{N}L \cdot \mathfrak{S}G$ ist und $4=[G:\mathfrak{S}G]=[Q:Q \cap \mathfrak{S}G]$ aus (8) und $G = Q \cdot \mathfrak{S}G$ folgt, so sehen wir, daß $o(\mathfrak{N}L)$ wenigstens durch 8 teilbar ist.

Ist T eine 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}L$, so ist $\mathfrak{N}L = TL$. Es ist $o(T)$ ein Vielfaches von 8 und $[T:T \cap L]=[\mathfrak{N}L:L]=2$. Wäre T keine 2-Sylow-Untergruppe von G, so gäbe es ein T normalisierendes, aber nicht zu T gehörendes 2-Element t. Aus

$$2=[T:T \cap L]=[T:T \cap L^t]$$

folgt, daß $[T:T \cap L \cap L^t]$ ein Teiler von 4 ist. Da $o(T)$ ein Vielfaches von 8 ist, so sind $T \cap L \cap L^t$ und also auch $L \cap L^t$ von 1 verschieden. Da L und L^t Komponenten der normalen Partition σ sind, so wird $L=L^t$, so daß t zu $\mathfrak{N}L$ gehört. Da T von t normalisiert wird, so ist $T\{t\}$ eine 2-Untergruppe von $\mathfrak{N}L$; und da T eine 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}L$ ist, so gehört t zu T. Aus diesem Widerspruch folgern wir, daß die 2-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}L$ auch 2-Sylow-Untergruppen von G sind. Wir fassen zusammen:

(10) Ist p ein ungerader Primteiler von $o(\mathfrak{S}G)$ und P eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{S}G$ [und wegen (8) auch von G], so ist P in einer Komponente P^* von σ enthalten; es ist $[\mathfrak{N}P^*:P^*]=2$, $o(P^*)$ ein Vielfaches von 4 und $\mathfrak{N}P^*$ enthält eine 2-Sylow-Untergruppe von G.

Da $\mathfrak{S}G$ wegen (4) einfach und nicht abelsch ist, so ist $\mathfrak{S}G$ keine 2-Gruppe; und es gibt also sicher einen ungeraden Primteiler p von $o(\mathfrak{S}G)$. Sei P irgendeine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{S}G$ und P^* die nach (10) existierende, eindeutig bestimmte, P enthaltende Komponente von σ. Wegen (10) ist weiter

$$[\mathfrak{N}P^*:P^*]=2,\ [G:\mathfrak{N}P^*] \text{ ungerade, 8 ein Teiler von } o(\mathfrak{N}P^*).$$

Sei q ein von p verschiedener, ungerader Primteiler von $o(\mathfrak{S}G)$. Ist Q eine q-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{S}G$, so ist Q wegen (10) in einer und nur einer Komponente Q^* von σ enthalten mit $[\mathfrak{N}Q^*:Q^*]=2$, ungeradem $[G:\mathfrak{N}Q^*]$ und durch 8 teilbarem $o(\mathfrak{N}Q^*)$. Da $\mathfrak{N}P^*$ und $\mathfrak{N}Q^*$ je eine 2-Sylow-Untergruppe von G enthalten, so gibt es ein Element g in G derart, daß $\mathfrak{N}P^* \cap \mathfrak{N}Q^{*g}$ eine 2-Sylow-Untergruppe Y von G enthält. Aus $2=[\mathfrak{N}P^*:P^*]=[\mathfrak{N}Q^{*g}:Q^{*g}]$ und daraus, daß Y eine gemeinsame 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}P^*$ und $\mathfrak{N}Q^{*g}$ ist, folgern wir $2=[Y:Y \cap P^*]=[Y:Y \cap Q^{*g}]$. Da $o(Y)$ durch 8 teilbar

ist, und da $[Y: Y \cap P^* \cap Q^{*g}]$ ein Teiler von 4 ist, so ist $o(Y \cap P^* \cap Q^{*g})$ gerade und also $P^* \cap Q^{*g} \neq 1$. Da P^*, Q^* und Q^{*g} Komponenten der normalen Partition σ sind, so ist $P^* = Q^{*g}$; und P^* enthält die q-Sylow-Untergruppe Q^g von $\mathfrak{S}G$. Damit haben wir gezeigt, daß P^* für jeden ungeraden Primteiler q von $o(\mathfrak{S}G)$ [und also auch von $o(G)$] eine q-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{S}G$ und also auch von G enthält. Weiter enthält $\mathfrak{N}P^*$ auch noch eine 2-Sylow-Untergruppe von G. Also ist $G = \mathfrak{N}P^*$. Da P^* wegen (5) nilpotent und $2 = [\mathfrak{N}P^*: P^*]$ ist, so folgt hieraus die Auflösbarkeit von G im Widerspruch zu (1). Unsere Annahme der Falschheit von (a) hat zu einem Widerspruch geführt, aus dem die Gültigkeit von (a) folgt.

Wir wenden uns jetzt dem Beweise der Behauptungen (b) und (c) zu. Hierzu betrachten wir eine nicht-einfache Gruppe G, deren Sockel $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht-abelsch ist, und die eine nicht-triviale Partition besitzt. Aus einer Kegelschen Bemerkung folgern wir dann die Existenz einer normalen, nicht-trivialen Partition σ von G; vgl. I, Beweis von Satz 4.7. Wir folgern aus Hilfssatz A.1, (a) die Einfachheit von σ. Dann ist σ wegen I, Satz 4.1, (1) keine Frobenius-Partition von G; und wir erschließen aus einem Kegelschen Satze die Nilpotenz aller Komponenten von σ; vgl. KEGEL [Satz 2]. Schließlich folgt noch aus Hauptsatz (a), daß $[G: \mathfrak{S}G] = 2$ ist.

Wären die 2-Sylow-Untergruppen von G dedekindsch, so wäre G wegen Satz A.11 eine $2'$-abgeschlossene Gruppe, da ja eine einfache, normale und nicht-triviale Partition frei von normalisatorgleichen Komponenten ist. Da $\mathfrak{S}G$ der einzige eigentliche Normalteiler von G ist, da G [mit $\mathfrak{S}G$] keine 2-Gruppe, aber $[G: \mathfrak{S}G] = 2$ ist, so würde aus der $2'$-Abgeschlossenheit von G die Ungeradheit von $o(\mathfrak{S}G)$ folgen. Dann wären die 2-Sylow-Untergruppen von G sogar zyklisch der Ordnung 2 und komplementär zu $\mathfrak{S}G$ in G. Da zyklische Untergruppen in Komponenten von σ liegen, so würde aus Lemma A.3 doch die Existenz einer normalisatorgleichen Komponente von σ folgen; und aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß die 2-Sylow-Untergruppen von G nicht dedekindsch sind, d.h. die Gültigkeit von (c).

Sei weiter p ein ungerader Primteiler von $o(G)$ und P eine p-Sylow-Untergruppe von G. Dann folgt $1 < P < \mathfrak{S}G$ aus $[G: \mathfrak{S}G] = 2$.

Ist zunächst P in einer Komponente X von σ enthalten, so ist X nilpotent und die p-Sylow-Untergruppe P von G ist eine charakteristische Untergruppe von X, die also auch ein Normalteiler von $\mathfrak{N}X$ ist. Aus $P \neq 1$ und I, Lemma 2.5 folgt aber auch, daß X von $\mathfrak{N}P$ normalisiert wird; und damit haben wir $\mathfrak{N}P = \mathfrak{N}X$ bewiesen. Da σ frei von normalisatorgleichen Komponenten ist, so folgt aus $[G: \mathfrak{S}G] = 2$ und Lemma A.3, daß X keine 2-Sylow-Untergruppe von G enthält. Aus dem wohlbekannten Frattinischen Schluß folgt $G = (\mathfrak{N}P)(\mathfrak{S}G)$; vgl. etwa BAER [*I*; p. 117, Lemma 1]. Aus $2 = [G: \mathfrak{S}G] = [\mathfrak{N}P: \mathfrak{N}P \cap \mathfrak{S}G]$ folgt dann die Existenz von nicht in X enthaltenen 2-Elementen aus $\mathfrak{N}P = \mathfrak{N}X$. Es gibt also ein Element v der Ordnung 2 in $\mathfrak{N}X$, das nicht in X liegt. Dann folgt $P \cap \mathfrak{C}v = 1$ aus I, Lemma 2.1. Da P von v normalisiert wird, so induziert also v einen Frobenius-Automorphismus der Ordnung 2 in P, woraus bekanntlich die Kommutativität von P folgt; vgl. etwa BURNSIDE, p. 90.

Es bleibt noch der Fall zu behandeln, daß P in keiner Komponente von σ enthalten ist. Wir folgern wieder zunächst aus dem Frattinischen Schluß, daß $G=(\mathfrak{N}P)(\mathfrak{S}G)$ und also $2=[G:\mathfrak{S}G]=[\mathfrak{N}P:\mathfrak{N}P\cap\mathfrak{S}P]$ ist. Die normale Partition $\sigma\cap\mathfrak{N}P$ ist nicht trivial, da sonst mit $\mathfrak{N}P$ auch P in einer Komponente von σ enthalten wäre. Weiter ist $o(\mathfrak{N}P)$ gewiß durch $2p$ teilbar, so daß $\mathfrak{N}P$ insbesondere nicht primär ist. Der p-Normalteiler P von $\mathfrak{N}P$ ist natürlich in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ enthalten. Wäre $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ nicht primär, so wäre diese nilpotente Untergruppe, und mit ihr auch P, wegen I, Folgerung 2.3 in einer Komponente von σ enthalten. Die folglich primäre Untergruppe $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ enthält die p-Sylow-Untergruppe $P\neq 1$, woraus sofort $P=\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ folgt. Da P ein von 1 verschiedener p-Normalteiler von $\mathfrak{N}P$ und $p\neq 2$ ist, so folgt aus II, Satz A die Nicht-Einfachheit von $\sigma\cap\mathfrak{N}P$. Wäre $\sigma\cap\mathfrak{N}P$ keine Frobenius-Partition, so besäße $\sigma\cap\mathfrak{N}P$ wegen I, Satz 5.1, (c) eine Komponente, die ein Normalteiler von $\mathfrak{N}P$ mit Primzahlindex, also gleich $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P=P$ wäre, was im vorliegenden Fall unmöglich ist. Also ist $\sigma\cap\mathfrak{N}P$ eine Frobenius-Partition. Da $[\mathfrak{N}P:P]=[\mathfrak{N}P:\mathfrak{F}\mathfrak{N}P]$ gerade ist, so gibt es wegen I, Satz 4.1, (5) ein Element in $\mathfrak{N}P$, das in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P=P$ einen Frobenius-Automorphismus der Ordnung 2 induziert; und hieraus folgt wieder [wegen BURNSIDE, p. 90] die Kommutativität von P. Damit haben wir auch (b) und also unseren Hauptsatz voll bewiesen.

Als erste Anwendung des Hauptsatzes beweisen wir zwei Einfachheitskriterien, die sich von den in der Einleitung formulierten wesentlich unterscheiden.

SATZ B.1. *Die folgenden Eigenschaften der normalen, nicht-trivialen Partition σ der Gruppe G sind äquivalent:*

(1) *σ ist nicht einfach.*

(2) *G ist entweder primär oder es existiert ein eigentlicher Hallscher Normalteiler von G.*

(3) *Es gibt eine charakteristische Sylow-Untergruppe $\neq 1$ von G.*

BEWEIS. Daß (3) aus (1) folgt, ergibt sich ohne weiteres aus II, Satz B; und es ist trivial, daß (2) aus (3) folgt.

Ist schließlich σ einfach, so ergibt sich aus II, Bemerkung die folgende Alternative: Entweder ist G isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 4; oder der Sockel $\mathfrak{S}G$ ist einfach und nicht-abelsch. Im ersten Fall ist G nicht primär und besitzt auch keinen eigentlichen Hallschen Normalteiler. Im zweiten Fall ist G entweder einfach oder aber es ist $[G:\mathfrak{S}G]=2$ und die 2-Sylow-Untergruppen von G sind nicht dedekindsch [Hauptsatz]. Dann ist aber natürlich auch G nicht primär und es ist frei von eigentlichen Hallschen Normalteilern. Mithin folgt aus der Einfachheit von σ die Ungültigkeit von (2), womit die Äquivalenz von (1) bis (3) dargetan ist.

SATZ B.2. *Die normale, nicht-triviale Partition σ der Gruppe G ist dann und nur dann einfach, wenn*

(I) $\mathfrak{N}P \neq \mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ *für jede* p*-Sylow-Untergruppe* P *von* G *mit ungeradem Primteiler* p *von* $o(G)$ *gilt und*

(II) $G/\mathfrak{F}G$ *keine 2-Gruppe ist und*

(III) *alle Komponenten von* σ *nilpotent sind.*

BEWEIS. Sei zunächst σ einfach. Dann ist wegen I, Satz 4.1, (1) insbesondere σ keine Frobenius-Partition, so daß die Komponenten von σ auch nicht normalisatorgleich sind. Anwendung eines Kegelschen Satzes ergibt die Nilpotenz der Komponenten von σ; vgl. KEGEL [Satz 2], womit die Notwendigkeit von (III) dargetan ist. — Weiter erschließen wir aus II, Bemerkung das Bestehen der folgenden Alternative:

Entweder ist G isomorph der symmetrischen Gruppe des Grades 4 oder $\mathfrak{S}G$ ist einfach und nicht-abelsch.

Ist G der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph, so ist 3 der einzige ungerade Primteiler von $o(G)$ und die Normalisatoren der 3-Sylow-Untergruppen sind nicht-abelsch der Ordnung 6; weiter ist $\mathfrak{F}G = \mathfrak{S}G$ elementar-abelsch der Ordnung 4 und $G/\mathfrak{F}G$ ist nicht-abelsch der Ordnung 6. In diesem Falle gelten also die beiden Bedingungen (I) und (II).

Ist aber $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht-abelsch, so ist $\mathfrak{F}G = 1$ und G keine 2-Gruppe, woraus wieder (II) folgt. Weiter ergibt sich aus dem Hauptsatz (a), daß $[G:\mathfrak{S}G] = 1$ oder 2 ist. Folglich existiert für keinen ungeraden Primteiler p von $o(G)$ eine von 1 verschiedene p-Faktorgruppe von G. Also folgt aus Satz A.11, daß $P \leqq (\mathfrak{N}P)'$ für jede p-Sylow-Untergruppe P von G gilt. Wäre trotzdem $\mathfrak{N}P = \mathfrak{F}\mathfrak{N}P$, so wäre P ein direkter Faktor der nilpotenten Gruppe $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P = \mathfrak{N}P$ und P wäre also gewiß nicht in $(\mathfrak{N}P)'$ enthalten, ein Widerspruch, der die Notwendigkeit von (I) ergibt.

Sei umgekehrt σ nicht einfach. Wäre G primär, so wäre $G = \mathfrak{F}G$ und $G/\mathfrak{F}G = 1$ eine 2-Gruppe, also (II) nicht erfüllt. Im folgenden nehmen wir deshalb an, daß G nicht primär ist. Sei weiter σ eine Frobenius-Partition von G. Dann ist $\mathfrak{F}G$ eine eigentliche, σ-zulässige, Hallsche Untergruppe von G; und die normalisatorgleichen Komponenten sind genau die Komplemente von $\mathfrak{F}G$ in G; vgl. I, Satz 4.1, (2). Sind nun etwa die Bedingungen (II) und (III) erfüllt, so betrachten wir eine normalisatorgleiche Komponente W von σ. Diese ist wegen (III) nilpotent; sie ist als Komplement von $\mathfrak{F}G$ in G zu $G/\mathfrak{F}G$ isomorph und mit $\mathfrak{F}G$ eine Hallsche Untergruppe von G. Es gibt einen ungraden Primteiler p von $o(W)$; und die nilpotente Gruppe W besitzt eine und nur eine p-Sylow-Untergruppe P, die natürlich $\neq 1$ ist. Da P eine charakteristische Untergruppe von W ist, so ist $W \leqq \mathfrak{N}P$. Aus dem Dedekindschen Modulsatz folgt dann $\mathfrak{N}P = W(\mathfrak{F}G \cap \mathfrak{N}P)$. Nun ist aber

$$P \circ (\mathfrak{F}G \cap \mathfrak{N}P) \leqq P \cap \mathfrak{F}G = 1,$$

so daß $\mathfrak{F}G \cap \mathfrak{N}P = \mathfrak{F}G \cap \mathfrak{C}P$ wird. Anwendung von I, Satz 4.1, (5) ergibt dann $\mathfrak{F}G \cap \mathfrak{N}P = 1$, so daß $\mathfrak{N}P = W$ nilpotent wird und also (I) nicht gilt, wenn (II) und (III) gelten.

Schließlich nehmen wir an, daß G nicht primär und σ weder einfach noch eine Frobenius-Partition von G ist. Anwendung von I, Satz 5.1, (c) ergibt dann die Existenz einer Komponente V von G, die Normalteiler von G ist und deren Index $[G:V]$ eine $o(V)$ teilende Primzahl p ist. Zusatz A.6, (2) ergibt, daß $V = \mathfrak{F}G$ von den Elementen aus G mit von p verschiedener Ordnung erzeugt wird. Gilt (II), so ist $p \neq 2$. Die Menge Y der Elemente aus V mit zu p teilerfremder Ordnung ist eine charakteristische Untergruppe von V und G. Ist P eine p-Sylow-Untergruppe von G, so ist $G = VP = YP$ und $Y \cap P = 1$. Wieder ist

$$(Y \cap \mathfrak{N}P) \circ P \leqq Y \cap P = 1$$

und also $Y \cap \mathfrak{N}P = Y \cap \mathfrak{C}P$. Elemente aus $Y \cap \mathfrak{C}P$ liegen aber wegen $(o(Y), o(P)) = 1$ und I, Lemma 2.1 in der gleichen Komponente wie die von 1 verschiedenen Elemente aus P, woraus $Y \cap \mathfrak{N}P = 1$ folgt, da Y eine von 1 verschiedene Untergruppe der Komponente V ist, P dagegen nicht in V enthalten ist. Es folgt $\mathfrak{N}P = P$, so daß (I) falsch ist, wenn (II) gilt. Damit haben wir gezeigt, daß die Nicht-Einfachheit von σ mit der gleichzeitigen Gültigkeit von (I), (II), (III) unverträglich ist.

C. Wir wollen in diesem Abschnitt die Analyse der Struktur der im Hauptsatz diskutierten Gruppen weitertreiben. Wir werden also in diesem Abschnitt eine Gruppe G mit den folgenden zwei Eigenschaften untersuchen:

(A) *G ist nicht einfach, aber $\mathfrak{F}G$ ist einfach und nicht abelsch.*

(B) *G besitzt eine nicht triviale Partition.*

Wir werden diese Voraussetzungen in den abzuleitenden Aussagen nicht wiederholen.

(1) $[G:\mathfrak{F}G] = 2$ *und die 2-Sylow-Untergruppen von G sind nicht dedekindsch.*

Dies ist weiter nichts als eine Wiederholung der Aussagen (a) und (c) des Hauptsatzes.

(2) *Es gibt eine einfache, normale, nicht triviale Partition σ von G.*

Dies folgt aus (B) und einer schon häufig angewandten Kegelschen Bemerkung; vgl. I, Beweis von Satz 4.7. Die Einfachheit von σ ergibt sich wegen (A) aus Hilfssatz A.1, (a).

Die folgende Untersuchung wird sich meist mit dem Paar G, σ befassen, das wir deshalb festhalten.

(3) *Ist X eine Komponente von σ, so ist $X \neq \mathfrak{N}X$ und X ist nilpotent.*

Beweis. Wäre nämlich $X = \mathfrak{N}X$, so wäre σ entweder trivial oder eine Frobenius-Partition. Die erste Möglichkeit ist durch unsere Wahl von σ ausgeschlossen; und aus der zweiten würde wegen I, Satz 4.1, (1) die (2) widersprechende Nicht-Einfachheit von σ folgen. Also ist $X \neq \mathfrak{N}X$; und hieraus folgt nach einem Satz von Kegel die Nilpotenz von X; vgl. Kegel [Satz 2].

(4) *Keine 2-Sylow-Untergruppe von G ist in einer Komponente von σ enthalten.*

BEWEIS. Ist P eine 2-Sylow-Untergruppe von G, so ist $G = P \cdot \mathfrak{S}G \neq \mathfrak{S}G$ wegen (1). Wäre P in der Komponente X von σ enthalten, so würde $X = \mathfrak{N}X$ aus Lemma A.3 folgen; und dies ist wegen (3) unmöglich.

(5) *Ist P eine 2-Sylow-Untergruppe von G, so ist $P^2 \neq 1$ und die Elemente mit von 2 verschiedener Ordnung aus P erzeugen eine abelsche Untergruppe $A \neq 1$ von P mit $[P:A] = 2$. Ist b ein nicht in A enthaltenes Element aus P, so ist $o(b) = 2$ und $a^{-1} = a^b$ für jedes a aus A. Schließlich ist $\mathfrak{Z}P$ genau die Gesamtheit der Elemente x aus A mit $x^2 = 1$.*

BEWEIS. Wäre $P^2 = 1$, so wäre P abelsch, was wegen (1) unmöglich ist. Also ist $A \neq 1$. Wäre A nicht abelsch, so gäbe es in P ein Paar nicht vertauschbarer Elemente, deren Ordnungen durch 4 teilbar sind. Aus Hilfssatz A.15 folgt dann, daß $\sigma \cap P$ trivial ist. Dann wäre aber P in einer Komponente von σ enthalten, was wegen (4) unmöglich ist. Also ist A abelsch. Da A abelsch und $A^2 \neq 1$ ist, so folgt aus I, Zusatz 5.6 die Trivialität von $\sigma \cap A$, so daß also A in einer Komponente von σ enthalten ist. Da P wegen (4) in keiner Komponente von σ enthalten ist, so ist $A \neq P$.

Ist b irgendein nicht in A enthaltenes Element aus P, so ist $o(b) = 2$, wie aus der Konstruktion von A folgt. Ist a ein Element aus A und b ein Element aus P, das nicht in A liegt, so ist auch ab ein nicht in A gelegenes Element aus P. Also ist auch $o(ab) = 2$, so daß

$$a^b = b\,a\,b = a^{-1}(a\,b)^2 = a^{-1}$$

ist.

Sind b' und b'' Elemente aus P, die nicht in A liegen, so haben nach dem bereits Gezeigten diese beiden Elemente die Ordnung 2; und es gilt

$$a^{b'b''} = (a^{-1})^{b''} = a \quad \text{für jedes } a \text{ aus } A.$$

Also ist $b'b''$ mit jedem Element aus A vertauschbar. Wegen $P^2 \neq 1$ enthält A ein Element c der Ordnung 4. Wäre $b'b''$ nicht in A enthalten, so wäre auch $o(b'b'') = 2$ und $o(ab'b'') = o(a) = 4$. Es lägen also a und $ab'b''$ in der Untergruppe A; und hieraus folgt die Zugehörigkeit von $b'b''$ zu A. Da b' und b'' Elemente der Ordnung 2 sind, so folgt hieraus $Ab' = Ab''$; und damit ist $[P:A] = 2$ bewiesen.

Sei t ein Element aus $\mathfrak{Z}P$. Wäre t nicht in A enthalten, so betrachten wir eines der wegen $P^2 \neq 1$ existierenden Elemente s der Ordnung 4 aus A. Es gilt

$$st = ts = s^{-1}t \neq st.$$

Aus diesem Widerspruch folgt die Zugehörigkeit von t zu A, so daß also $\mathfrak{Z}P \subseteq A$ ist. — Ist a ein Element aus A und b ein nicht in A enthaltenes Element aus P, so ist

$$ab = b\,a^b = b\,a^{-1};$$

und es ist also dann und nur dann $ab = ba$, wenn $a = a^{-1}$ ist. Da A abelsch ist, so folgt jetzt unmittelbar, daß $\mathfrak{Z}P$ genau die Menge der $a^2 = 1$ erfüllenden Elemente a aus A ist.

(6) *G ist nicht 2-normal.*

Wir erinnern daran, daß die Gruppe G dann und nur dann *2-normal* ist, wenn für 2-Sylow-Untergruppen P und Q von G aus $\mathfrak{Z}P \subseteq Q$ stets $\mathfrak{Z}P = \mathfrak{Z}Q$ folgt.

Beweis. Wir betrachten zum Beweise zunächst eine 2-Sylow-Untergruppe P von G. Wegen (5) ist $P^2 \neq 1$ und die von den Elementen mit von 2 verschiedener Ordnung aus P erzeugte charakteristische Untergruppe A von P ist abelsch mit $[P:A]=2$. Aus I, Zusatz 5.6 folgt, daß A in einer Komponente von $\sigma \cap P$ enthalten ist. Also gibt es eine A enthaltende Komponente B von σ. Aus (5) folgt noch $1 < \mathfrak{Z}P \subseteq A \subseteq B$.

Ist t ein $\mathfrak{Z}P$ normalisierendes Element, so folgt aus $1 < \mathfrak{Z}P \subseteq B$ und I, Lemma 2.5 die Zugehörigkeit von t zu $\mathfrak{N}B$. Also gilt $P \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{Z}P \subseteq \mathfrak{N}B$. Aus (4) folgt noch, daß P nicht in B enthalten ist. Wegen $A \subseteq B$ und $[P:A]=2$ wird $A = P \cap B$. Da P eine 2-Sylow-Untergruppe von G und also auch von $\mathfrak{N}B$ ist, so ist A eine 2-Sylow-Untergruppe des Normalteilers B von $\mathfrak{N}B$. Da die Komponente B von σ wegen (3) nilpotent ist, so ist die 2-Sylow-Untergruppe A von B eine charakteristische Untergruppe von B. Da $\mathfrak{Z}P$ wegen (5) eine charakteristische Untergruppe von A und also auch von B ist, so ist $\mathfrak{Z}P$ ein Normalteiler von $\mathfrak{N}B$. Folglich ist $\mathfrak{N}B \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{Z}P$; und damit haben wir $\mathfrak{N}B = \mathfrak{N}\mathfrak{Z}P$ bewiesen.

Aus $A = P \cap B$, $P \subseteq \mathfrak{N}B$ und $[P:A]=2$ folgt, daß $[\mathfrak{N}B:B]$ zwar durch 2, aber nicht durch 4 teilbar ist. Wäre $[\mathfrak{N}B:B] \neq 2$, so gäbe es eine $[\mathfrak{N}B:B]$ teilende ungerade Primzahl p. Insbesondere wäre $\mathfrak{N}B$ nicht primär. Da B eine Komponente von $\sigma \cap \mathfrak{N}B$ ist, so ist die Partition $\sigma \cap \mathfrak{N}B$ normal und nicht einfach. Da $[\mathfrak{N}B:B]$ durch $2p$ teilbar ist, so folgt aus I, Satz 5.1, (c), daß $\sigma \cap \mathfrak{N}B$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}B$ ist. Aus I, Satz 4.1, (1) folgt dann, daß $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ eine $(\sigma \cap \mathfrak{N}B)$-zulässige, eigentliche, Hallsche, nilpotente, charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}B$ ist. Der nilpotente Normalteiler B von $\mathfrak{N}B$ ist natürlich in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ enthalten. Also ist $A \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}B$; und da $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ Hallsch in $\mathfrak{N}B$ ist, so ist P die 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$. Weiter gibt es ein nicht in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ enthaltenes Element t in $\mathfrak{N}B$ von Primzahlordnung, das in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ wegen I, Satz 4.1, (5) einen Frobenius-Automorphismus induziert. Aus $P \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ und $G = P \cdot \mathfrak{S}G$ folgt sofort, daß $\mathfrak{N}B = \mathfrak{F}\mathfrak{N}B\ (\mathfrak{S}G \cap \mathfrak{N}B)$ das Produkt seiner eigentlichen Normalteiler $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ und $\mathfrak{S}G \cap \mathfrak{N}B$ ist. Aus $[G:\mathfrak{S}G]=2$ folgt, daß das Element t, dessen Ordnung ja eine ungerade Primzahl ist, da es nicht in P, aber doch in $\mathfrak{N}B$ liegt, zu $\mathfrak{S}G \cap \mathfrak{N}B$ gehört. Anwendung von Hilfssatz A.2 ergibt $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B \cap \mathfrak{C}t \neq 1$; und dies widerspricht der Tatsache, daß t in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}B$ einen Frobenius-Automorphismus induziert. Aus diesem Widerspruch folgt $[\mathfrak{N}B:B]=2$.

Die Elemente ungerader Ordnung in der nilpotenten Gruppe B bilden eine charakteristische Untergruppe U von B mit ungerader Ordnung. Dann ist U ein Normalteiler von $\mathfrak{N}B$; und $\mathfrak{N}B/U \cong P$. Da P nicht zyklisch ist, so besitzen P und also auch $\mathfrak{N}B$ Faktorgruppen, die elementar-abelsch der Ordnung 4 sind. Insbesondere ist also die sog. 2-Faktorkommutatorgruppe von $\mathfrak{N}B$ nicht zyklisch der Ordnung 2. Da aber die 2-Faktorkommutatorgruppe von G wegen (A) und (1) zyklisch der Ordnung 2 ist, so sind die

2-Faktorkommutatorgruppen von G und $\mathfrak{N}B=\mathfrak{N}\mathfrak{Z}P$ nicht isomorph. Anwendung des Zweiten Grünschen Satzes ergibt, daß G nicht 2-normal ist; vgl. ZASSENHAUS [p. 135, Satz 6].

(7) *Die Zentren der 2-Sylow-Untergruppen von G haben die Ordnung 2.*

BEWEIS. Angenommen, dies wäre falsch. Sei P eine 2-Sylow-Untergruppe von G. Es folgt aus (5), daß $(\mathfrak{Z}P)^2=1$ ist; und aus unserer Annahme ergibt sich, daß 4 ein Teiler von $o(\mathfrak{Z}P)$ ist. Wegen (6) gibt es eine 2-Sylow-Untergruppe Q von G mit $\mathfrak{Z}Q\neq\mathfrak{Z}P\subseteq Q$. Aus (5) folgt, daß die von den Elementen mit von 2 verschiedener Ordnung aus Q erzeugte Untergruppe A von Q abelsch ist, $[Q:A]=2$ erfüllt, und daß $\mathfrak{Z}Q$ aus 1 und den Elementen der Ordnung 2 aus A besteht. Da $o(\mathfrak{Z}P)$ durch 4 teilbar ist, so ist $A\cap\mathfrak{Z}P\neq 1$; und hieraus folgt sogar $1<A\cap\mathfrak{Z}P=\mathfrak{Z}Q\cap\mathfrak{Z}P$. Es ist klar, daß die verschiedenen 2-Sylow-Untergruppen P und Q in $W=\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}Q\cap\mathfrak{Z}P)$ enthalten sind. Sei B die Untergruppe von P, die von den Elementen aus P mit von 2 verschiedener Ordnung erzeugt wird. Auch B ist abelsch mit $[P:B]=2$. Aus (5) folgt noch, daß $\mathfrak{Z}P\subseteq B$ ist; und es gilt also

$$1<\mathfrak{Z}P\cap\mathfrak{Z}Q\subseteq A\cap B.$$

Anwendung von I, Zusatz 5.6 ergibt, daß A in einer Komponente A^* von σ und B in einer Komponente B^* von σ enthalten ist. Dann ist aber $1\neq A\cap B\subseteq A^*\cap B^*$, woraus $A^*=B^*$ folgt. Wegen (3) ist diese Komponente A^* von σ nilpotent; und da 2-Sylow-Untergruppen von G wegen (4) nicht in Komponenten von σ enthalten sind, so ist A genau die 2-Sylow-Untergruppe von A^* und B die 2-Sylow-Untergruppe von B^*. Aus $A^*=B^*$ folgt $A=B$; und hieraus folgt wegen (5) weiter $\mathfrak{Z}P=\mathfrak{Z}Q$. Dies ist ein Widerspruch, aus dem (7) folgt.

(8) *Ist P eine 2-Sylow-Untergruppe von G, so ist $P=\{a,b\}$ mit $o(b)=2$, $a^b=a^{-1}\neq a$.*

Dies folgt durch mühelose Kombination von (5) und (7), und damit ist auch die Behauptung (c*) des Hauptsatzes bewiesen.

(9) *Ist A eine 2-Untergruppe von G, so ist $\mathfrak{N}A/\mathfrak{C}A$ eine 2-Gruppe, wenn A nicht elementar-abelsch der Ordnung 4 ist.*

BEWEIS. Ist A zyklisch der Ordnung 2^i, so hat die Automorphismengruppe von A die Ordnung 2^{i-1}. Sei A weder zyklisch noch elementar-abelsch der Ordnung 4. Da A natürlich in einer 2-Sylow-Untergruppe von G enthalten ist, so folgt aus [(5) und] (8), daß A einen zyklischen Normalteiler K besitzt, dessen Ordnung ein Vielfaches von 4 ist, und dessen Index $[A:K]=2$ ist, daß weiter die nicht in K enthaltenen Elemente aus A sämtlich die Ordnung 2 haben. Ist etwa $o(K)=2^k$, so ist die Ordnung der Automorphismengruppe von A genau 2^{2k-1}, da wir erstens ein gegebenes erzeugendes Element von K auf ein beliebiges erzeugendes Element von K abbilden können [2^{k-1} Möglichkeiten], und da wir unabhängig hiervon ein gegebenes nicht in K enthaltenes Element aus A auf ein beliebiges nicht in K enthaltenes Element

abbilden können [2^k Möglichkeiten]. Also ist in beiden Fällen die Gruppe aller Automorphismen von A eine 2-Gruppe. Da $\mathfrak{N}A/\mathfrak{C}A$ im wesentlichen mit einer Gruppe von Automorphismen von A identisch ist, so ist $\mathfrak{N}A/\mathfrak{C}A$ auch eine 2-Gruppe.

(10) *Es gibt elementar-abelsche Untergruppen A der Ordnung 4 von G, deren Normalisator $\mathfrak{N}A$ der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph ist.*

Beweis. Wäre $\mathfrak{N}A/\mathfrak{C}A$ für jede 2-Untergruppe A von G eine 2-Gruppe, so wäre G nach einem Kriterium von Frobenius eine $2'$-abgeschlossene Gruppe; vgl. etwa Hall [p. 217, Theorem 14.4.7]. Nun sind aber $2'$-abgeschlossene Gruppen auch 2-normal. Also folgt aus (6), daß es eine 2-Untergruppe A von G derart gibt, daß $\mathfrak{N}A/\mathfrak{C}A$ keine 2-Gruppe ist; und aus (9) folgt dann, daß ein solches A elementar-abelsch der Ordnung 4 ist; [und zwar ist $A=\{\mathfrak{Z}P, b\}$].

Sei also A elementar-abelsch der Ordnung 4 und $\mathfrak{N}A/\mathfrak{C}A$ keine 2-Gruppe. Da die Automorphismengruppe von A genau die Ordnung 6 hat, so ist $[\mathfrak{N}A:\mathfrak{C}A]$ ein Teiler von 6. Da $[\mathfrak{N}A:\mathfrak{C}A]$ keine Potenz von 2 ist, so muß also $[\mathfrak{N}A:\mathfrak{C}A]$ ein Vielfaches von 3 sein. Ist P irgendeine A enthaltende 2-Sylow-Untergruppe, so folgt aus (8) einmal, daß $A<P\cap\mathfrak{N}A$ ist, und daß $A=P\cap\mathfrak{C}A$ und also $[P\cap\mathfrak{N}A:A]=2$ ist. Damit ist bereits gezeigt, daß $[\mathfrak{N}A:\mathfrak{C}A]=6$ ist. Wäre $\mathfrak{C}A\neq A$, so müßte $\mathfrak{C}A$ ein Element w von ungerader Primzahlordnung enthalten, da ja A gewiß die 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{C}A$ ist. Aus I, Lemma 2.1 würde dann folgen, daß die w enthaltende Komponente W von σ auch A enthält. Ist wieder P eine A enthaltende 2-Sylow-Untergruppe, so ist $P=BA$, wobei B ein zyklischer Normalteiler von P mit Index $[P:B]=2$ ist [wegen (8)]. Die Ordnung von B ist ein Vielfaches von 4 und $A\cap B=\mathfrak{Z}P\neq 1$ [wegen (8)]. Es müßte also auch B in W enthalten sein, so daß sogar $P\leqq W$ im Widerspruch zu (4) gelten würde. Damit haben wir $\mathfrak{C}A=A$ und also auch $o(\mathfrak{N}A)=24$ bewiesen. Nun ist aber bekanntlich die symmetrische Gruppe des Grades 4 genau die Gruppe der Ordnung 24, die in einem elementar-abelschen Normalteiler der Ordnung 4 dessen volle Automorphismengruppe induziert. Damit haben wir gezeigt, daß $\mathfrak{N}A$ der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph ist.

(11) *Ist P eine 2-Sylow-Untergruppe von G, so ist $P=\mathfrak{N}P$ und $P\cap\mathfrak{S}G$ enthält eine elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung 4.*

Beweis. Aus (9) folgt, daß $\mathfrak{N}P/\mathfrak{C}P$ eine 2-Gruppe und also $\mathfrak{N}P=P\cdot\mathfrak{C}P$ ist. Natürlich ist $\mathfrak{Z}P=P\cap\mathfrak{C}P$ eine 2-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{C}P$. Wäre $\mathfrak{Z}P<\mathfrak{C}P$, so gäbe es in $\mathfrak{C}P$ ein Element w von ungerader Primzahlordnung; und aus I, Lemma 2.1 würde folgen, daß P in der w enthaltenden Komponente von σ enthalten ist. Dies widerspricht aber (4). Also ist $\mathfrak{Z}P=\mathfrak{C}P$ und $\mathfrak{N}P=P\cdot\mathfrak{Z}P=P$.

Aus $[G:\mathfrak{S}G]=2$ folgen $G=P\cdot\mathfrak{S}G$ und $[P:P\cap\mathfrak{S}G]=2$. Aus (7) folgt $o(\mathfrak{Z}P)=2$; und da der Normalteiler $P\cap\mathfrak{S}G$ von P von 1 verschieden ist, so ist sicherlich $\mathfrak{Z}P\leqq P\cap\mathfrak{S}G$. Es folgt, daß alle 2-Sylow-Zentren im Sockel

liegen. Aus (6) ergibt sich die Existenz einer 2-Sylow-Untergruppe Q, deren Zentrum $\mathfrak{Z}Q$ zwar in P enthalten ist, aber von $\mathfrak{Z}P$ verschieden ist. Dann ist $\mathfrak{Z}P \otimes \mathfrak{Z}Q$ eine elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung 4 von P, die in $\mathfrak{S}G$ enthalten ist, da ja alle 2-Sylow-Zentren im Sockel liegen.

(12) *Ist p ein ungerader Primteiler von $o(G)$, so sind die Durchschnitte verschiedener p-Sylow-Untergruppen von G trivial.*

BEWEIS. Wäre dies nicht wahr, so gäbe es ein Paar verschiedener p-Sylow-Untergruppen A, B von G mit $A \cap B \neq 1$. Aus Hauptsatz (b) folgt die Kommutativität von A und B [wegen $p \neq 2$]. Setzen wir $U = \mathfrak{N}(A \cap B)$, so sind also gewiß A und B Untergruppen [und mithin p-Sylow-Untergruppen] von U. Da U zwei verschiedene p-Sylow-Untergruppen besitzt, so ist U nicht nilpotent und $\mathfrak{F}U$ enthält keine p-Sylow-Untergruppe von U. Es ist also zwar $A \cap B$, aber weder A noch B in $\mathfrak{F}U$ enthalten. Folglich ist $\mathfrak{F}U$ keine Hallsche Untergruppe von U; und hieraus folgt wegen I, Satz 4.1, (1), daß $\sigma \cap U$ keine Frobenius-Partition von U ist. Aus $U \neq \mathfrak{F}U$ und (3) folgt, daß U in keiner Komponente von σ enthalten und $\sigma \cap U$ mithin nicht trivial ist. Da $A \cap B$ ein von 1 verschiedener p-Normalteiler von U und $p \neq 2$ ist, so ergibt sich aus II, Satz A, daß $\sigma \cap U$ nicht einfach ist. Anwendung von I, Satz 5.1, (c) ergibt jetzt die Existenz einer Komponente V von $\sigma \cap U$, die ein Normalteiler von U mit Primzahlindex $[U:V]$ ist. Wegen (3) ist V nilpotent, kann also weder A noch B enthalten. Es folgt $[U:V] = p$ und V enthält zwar $A \cap B$, ist aber keine p-Gruppe, also auch nicht primär.

Natürlich liegt V in einer eindeutig bestimmten Komponente W von σ. Da die Untergruppe $V \neq 1$ von W ein Normalteiler von U ist, so ist U wegen I, Lemma 2.5 in $\mathfrak{N}W$ enthalten. Also ist p ein gemeinsamer Primteiler von $o(W)$ und $[\mathfrak{N}W:W]$. Natürlich ist $\sigma \cap \mathfrak{N}W$ eine normale, nicht einfache Partition der nicht primären Gruppe $\mathfrak{N}W$. Es ist W wegen (3) nilpotent; und aus Zusatz A.6 folgern wir, daß $p = [\mathfrak{N}W:W]$ ist, und daß die Elemente aus W mit zu p teilerfremder Ordnung eine Hallsche Untergruppe H von G bilden [die charakteristisch in W und $\mathfrak{N}W$ ist]. Da $\mathfrak{N}W$ nicht primär ist, so ist $H \neq 1$. Wäre $o(H)$ gerade, so würde H als Hallsche Untergruppe von G eine ganze 2-Sylow-Untergruppe von G enthalten, die dann im Widerspruch zu (4) in der Komponente W von σ läge. Also sind W [und $\mathfrak{N}W$] Gruppen ungerader Ordnung. Ist q ein Primteiler von $o(H)$, so enthält die Hallsche Untergruppe H von G eine q-Sylow-Untergruppe Q von G. Aus $[G:\mathfrak{S}G] = 2$ folgt, daß Q eine q-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{S}G$ ist; und aus dem Frattinischen Schluß ergibt sich $G = (\mathfrak{S}G)(\mathfrak{N}Q)$; vgl. BAER [*1*; p. 117, Lemma 1]. Folglich ist $o(\mathfrak{N}Q)$ gerade. Aus $1 < Q \leqq H \leqq W$ und I, Lemma 2.5 folgt $\mathfrak{N}Q \leqq \mathfrak{N}W$ und also auch die Gradheit von $o(\mathfrak{N}W)$. Dies ist ein Widerspruch, aus dem die Gültigkeit von (12) folgt.

(13) *Ist A eine p-Sylow-Untergruppe von G mit $p \neq 2$, ist b ein nicht in A enthaltenes Element aus G mit $A \cap \mathfrak{C}b \neq 1$, so ist A in der b enthaltenden Komponente B von σ enthalten.*

Beweis. Es folgt aus Hauptsatz (b), daß A abelsch ist. Da A und A^b zwei p-Sylow-Untergruppen von G mit ungradem p und $1 < A \cap \mathfrak{C} b \leqq A \cap A^b$ sind, so folgt $A = A^b$ aus (12). Da A von b normalisiert wird, während b nicht zu A gehört, so ist b kein p-Element und es gibt eine Potenz d von b mit Primzahlordnung $o(d) \neq p$. Natürlich ist auch $A \cap \mathfrak{C} d \neq 1$; und mit b liegt auch d in der Komponente B von σ. Wir nehmen an, daß $A \subsetneqq B$ gilt.

Sei $D = A\{d\}$. Dann ist $B^* = B \cap D \neq D$ und B^* ist eine d enthaltende Komponente von $\sigma \cap D$. Da $o(d)$ eine von p verschiedene Primzahl ist, so folgt aus I, Lemma 2.1, daß $1 < A \cap \mathfrak{C} d \leqq B^*$ ist. Die Komponente B^* von $\sigma \cap D$ ist also nicht primär; sie erfüllt $A \cap B^* \neq 1$; und sie ist wegen (3) nilpotent. Natürlich ist der p-Normalteiler A von D in $\mathfrak{F} D$ enthalten. Wäre $A \neq \mathfrak{F} D$, so würde $D = \mathfrak{F} D$ aus $[D:A] = o(d)$, eine Primzahl, folgen; und die nicht primäre nilpotente Gruppe $D = \mathfrak{F} D$ wäre ganz in einer Komponente von σ enthalten [wegen I, Folgerung 2.3], was $D \neq B^*$ widerspricht. Also ist $A = \mathfrak{F} D$. Aus II, Satz B folgt, daß die normale, nicht triviale Partition $\sigma \cap D$ von D auch nicht einfach ist. Da B^* zwar nicht in $A = \mathfrak{F} D$ enthalten ist, es aber nicht-trivial schneidet, so folgt aus I, Satz 4.1, (1), daß $\sigma \cap D$ keine Frobenius-Partition von D sein kann. Aus I, Satz 5.1, (c) folgt nun die Existenz einer Komponente E von $\sigma \cap D$, die ein Normalteiler von D mit Primzahlindex $[D:E]$ ist. Wegen (3) ist E nilpotent. Der nilpotente Normalteiler E ist also in $\mathfrak{F} D = A$ enthalten. Daraus folgt $E \cap B^* = 1$, so daß $o(B^*)$ ein Teiler der Primzahl $[D:E]$ ist. Aber $o(B^*)$ ist durch die zwei verschiedenen Primzahlen p und $o(d)$ teilbar. Unsere Annahme, daß A nicht in B enthalten ist, hat zu einem Widerspruch geführt; und (13) ist bewiesen.

(14) *Ist X eine Komponente von σ, so ist die ungrade Primzahl p dann und nur dann ein gemeinsamer Teiler von $o(X)$ und $[G:X]$, wenn X eine p-Gruppe, aber keine p-Sylow-Untergruppe von G ist.*

Beweis. Als Komponente von σ ist $X \neq 1$. Ist also X eine p-Gruppe, ohne eine p-Sylow-Untergruppe von G zu sein, so ist p ein gemeinsamer Teiler von $o(X)$ und $[G:X]$.

Sei umgekehrt p ein gemeinsamer Teiler von $o(X)$ und $[G:X]$, aber X keine p-Gruppe. Dann ist X weder primär noch eine Hallsche Untergruppe von G. Anwendung von Zusatz A.6 ergibt dann, daß $[\mathfrak{N} X:X]$ eine $o(X)$ teilende Primzahl q ist, und daß die Elemente aus X mit zu q teilerfremder Ordnung eine Hallsche Untergruppe Y von G bilden. Wäre $p \neq q$, so wäre der Teiler p von $o(X)$ auch ein Teiler von $o(Y)$ und also kein Teiler von $[G:Y]$ und erst recht keiner von $[G:X]$. Dies ist unmöglich und also ist $p = q = [\mathfrak{N} X:X]$. Da X keine p-Gruppe ist, so ist $Y \neq 1$. Wäre $o(Y)$ gerade, so wären die 2-Sylow-Untergruppen von Y in X enthaltene 2-Sylow-Untergruppen von G, was (4) widerspricht. Also ist $o(Y)$ und wegen der Ungradheit von p auch $o(\mathfrak{N} X)$ ungerade; und aus $[G:\mathfrak{S} G] = 2$ folgt $\mathfrak{N} X \leqq \mathfrak{S} G$. Da $Y \neq 1$ ist, so gibt es einen Primteiler r von $o(Y)$. Ist R eine r-Sylow-Untergruppe von Y, so ist R eine in $\mathfrak{S} G$ enthaltene r-Sylow-Untergruppe von G [und $\mathfrak{S} G$]; und Anwendung des Frattinischen Schlusses ergibt $G = (\mathfrak{S} G)(\mathfrak{N} R)$; vgl.

BAER [*1*; p. 117, Lemma 1]. Also ist $\mathfrak{N}R$ nicht in $\mathfrak{S}G$ enthalten. Andererseits folgt aus $1 < R \leqq Y \leqq X$ und I, Lemma 2.5, daß $\mathfrak{N}R \leqq \mathfrak{N}X \leqq \mathfrak{S}G$ ist. Dies ist ein Widerspruch. Also ist X eine p-Gruppe. Da aber p ein Teiler von $[G:X]$ ist, so kann X keine p-Sylow-Untergruppe von G sein, womit (14) vollständig bewiesen ist.

(15) *Ist X eine Komponente von σ und $o(X)$ gerade, so enthält X ein und nur ein Element der Ordnung 2; und es ist $[\mathfrak{N}X:X]=2$.*

BEWEIS. Wegen (3) ist X nilpotent und besitzt also eine und nur eine 2-Sylow-Untergruppe E. Da $o(X)$ gerade ist, so ist $E \neq 1$; und E enthält also wenigstens ein Element der Ordnung 2. Enthielte E mehr als ein Element der Ordnung 2, so enthielte E auch eine elementar-abelsche Untergruppe F der Ordnung 4. Natürlich ist E in einer 2-Sylow-Untergruppe P von G enthalten; und aus (8) folgt, daß $o(\mathfrak{Z}P)=2$ und $\mathfrak{Z}P < F \leqq E \leqq X$ ist. Nun ist $\mathfrak{Z}P$ in dem zyklischen Normalteiler B von P mit $[P:B]=2$ enthalten; und die eindeutig bestimmte, die zyklischen Untergruppe B enthaltende Komponente von σ muß also X sein. Dann enthielte aber X mit B und F auch $BF=P$; und dies widerspricht (4). Also enthält X ein und nur ein Element der Ordnung 2.

Aus $1 < E \leqq X$ und I, Lemma 2.5 folgt $\mathfrak{N}E \leqq \mathfrak{N}X$. Da E wegen (4) eine echte Untergruppe der 2-Sylow-Untergruppe P von G ist, so ist $E < \mathfrak{N}E \cap P$; und hieraus folgt sofort die Gradheit von $[\mathfrak{N}X:X]$. Ist zunächst $o(X)=2$, so ist $X=E$ und $\mathfrak{N}X=\mathfrak{C}X$, woraus wegen I, Lemma 2.1 folgt, daß $\mathfrak{N}X$ eine 2-Gruppe ist. Es folgt weiter, daß X nicht das Zentrum einer Sylow-Untergruppe sein kann, da dann der ganze zyklische Normalteiler der 2-Sylow-Untergruppe P mit Index 2 in X enthalten sein müßte; und aus (8) folgt $[\mathfrak{N}X:X]=2$. Ist aber X eine zyklische 2-Gruppe von einer Ordnung $\neq 2$, so ist $X=E$ der zyklische Normalteiler von P mit Index 2. Anwendung von (9) und I, Lemma 2.1 ergibt wieder, daß $\mathfrak{N}X$ eine 2-Gruppe und also $[\mathfrak{N}X:X]=2$ ist. Ist schließlich X keine 2-Gruppe, so folgern wir $[\mathfrak{N}X:X]=2$ aus Zusatz A.6.

(16) *Komponenten gerader Ordnung von σ sind dann und nur dann in G konjugiert, wenn ihre Elemente der Ordnung 2 in derselben Restklasse modulo $\mathfrak{S}G$ liegen.*

Wir übergehen den Beweis dieser Tatsache, da wir von ihr im folgenden keinen Gebrauch machen wollen

(17) *Alle Komponenten von σ sind abelsch.*

Diese Aussage (17) verdanke ich einem Hinweis von Herrn O. KEGEL.

BEWEIS. Jede Komponente X von σ ist wegen (3) nilpotent. Ist p ein ungrader Primteiler von $o(X)$, so ist wegen Hauptsatz (b) jede p-Sylow-Untergruppe von G abelsch. Also ist auch die p-Sylow-Untergruppe von X abelsch. Ist 2 ein Teiler von $o(X)$, so enthält X wegen (15) ein und nur ein Element der Ordnung 2; und jetzt folgt aus (8), daß die 2-Sylow-Untergruppe von X zyklisch ist. Also ist X als direktes Produkt abelscher Gruppen abelsch.

D. Beweis des Einfachheitskriteriums. Ist zunächst σ einfach und $\mathfrak{F}G \neq 1$, so ergibt sich wegen II, Satz A, daß G der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph ist. Damit haben wir (II) aus (I) hergeleitet.

Gilt (II), ohne daß G isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 4 ist, so ist $\mathfrak{F}G = 1$. Dann ist der Sockel $\mathfrak{S}G$ das direkte Produkt einfacher, nicht-abelscher Gruppen. Anwendung von I, Folgerung 3.6 ergibt dann daß $\mathfrak{S}G$ sogar einfach und nicht abelsch ist, da ja σ eine normale, nicht-triviale Partition von G ist. Damit haben wir (III) aus (II) hergeleitet.

Aus (III) folgt (IV) wegen (C.10).

Wir nehmen schließlich an, daß zwar σ nicht einfach ist, G aber eine zur symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorphe Untergruppe S enthält. Aus $o(S) = 2^3 \cdot 3$ folgt, daß G nicht primär ist. Da S drei verschiedene 2-Sylow-Untergruppen besitzt, so gibt es in G wenigstens drei verschiedene 2-Sylow-Untergruppen. Also ist G nicht 2-abgeschlossen; und dies ist gleichwertig mit der Aussage: $\mathfrak{F}G$ enthält keine 2-Sylow-Untergruppe von G.

Wäre nun σ eine Frobenius-Partition von G, so wäre wegen I, Satz 4.1 einmal $\mathfrak{F}G$ eine eigentliche, nilpotente, charakteristische, σ-zulässige Hallsche Untergruppe von G und eine p-Sylow-Untergruppe von $G/\mathfrak{F}G$ enthielte höchstens eine zyklische Untergruppe der Ordnung p. Da $\mathfrak{F}G$ keine 2-Sylow-Untergruppe von G enthalten kann, so muß $o(\mathfrak{F}G)$ ungerade sein. Der Sockel $\mathfrak{S}S$ ist elementar-abelsch der Ordnung 4. Also ist $\mathfrak{F}G \cap \mathfrak{S}S = 1$, so daß $\mathfrak{S}S$ der Untergruppe $(\mathfrak{F}G)(\mathfrak{S}S)/\mathfrak{F}G$ von $G/\mathfrak{F}G$ isomorph ist. Dies widerspricht aber der Tatsache, daß $G/\mathfrak{F}G$ keine elementar-abelschen Untergruppen der Ordnung 4 enthalten kann. Aus diesem Widerspruch folgt, daß σ keine Frobenius-Partition ist.

Da G nicht primär und die normale Partition σ von G weder einfach noch eine Frobenius-Partition ist, so folgt aus I, Satz 5.1, (c) die Existenz einer Komponente K von σ, die ein Normalteiler von G mit Primzahlindex $[G:K] = p$ ist. Da K gewiß nicht normalisatorgleich ist, so können wir aus einem Kegelschen Resultat die Nilpotenz von K folgern; vgl. Kegel [Satz 2]. Dann ist $S \cap K$ ein nilpotenter Normalteiler von S, dessen Index $[S:S\cap K] = 1$ oder p ist. Aber S ist der symmetrischen Gruppe des Grades 4 isomorph und besitzt folglich keinen derartigen Normalteiler. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß (I) aus (IV) folgt, womit unser Kriterium voll bewiesen ist.

Bemerkung. Durch Kombination des Hauptsatzes und des Einfachheitskriteriums ergibt sich folgendes: Ist σ eine normale, einfache und nicht triviale Partition der Gruppe G, so ist entweder G isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 4 oder G ist einfach und nicht abelsch oder aber $\mathfrak{S}G$ ist einfach und nicht-abelsch mit Index $[G:\mathfrak{S}G] = 2$. Jede dieser drei Möglichkeiten kann wirklich eintreten. Ist nämlich G die symmetrische Gruppe des Grades 4, so ist die Menge σ der nicht in $\mathfrak{S}G$ enthaltenen zyklischen Untergruppen eine normale, nicht-triviale, einfache Partition. Es gibt unendlich viele Beispiele einfacher, nicht-abelscher Gruppen mit normalen, nicht-trivialen Partitionen. Ist schließlich G die symmetrische Gruppe des Grades 5, so ist $\mathfrak{S}G$ die alternierende Gruppe des Grades 5. Ist σ die Menge der zyklischen Untergruppen

von G, die entweder nicht in $\mathfrak{S}G$ liegen oder die Ordnung 5 haben, so ist σ eine normale, nicht-triviale, einfache Partition von G. Ist allgemeiner G die gebrochen-lineare Gruppe [mit beliebiger Determinante $\neq 0$] über dem Primkörper der Charakteristik $p \neq 2$, so ist $\mathfrak{S}G$ einfach, nicht-abelsch und vom Index $[G:\mathfrak{S}G]=2$; und die Menge der zyklischen Untergruppen von G der Ordnungen $p-1, p, p+1$ ist eine normale, einfache und nicht triviale Partition von G.

E. Die Situation einer Komponente X der normalen Partition σ von G wird in erster Annäherung durch die Partition $\sigma \cap \mathfrak{N}X$ von $\mathfrak{N}X$ beschrieben. Wir wollen im folgenden solche Komponenten X betrachten, deren Situation etwa durch Zusatz A.6 beschrieben wird; vgl. hierzu auch Zusatz A.18 und A.19.

SATZ E.1. *Ist X eine nicht primäre Komponente der normalen Partition σ von G und p ein ungrader gemeinschaftlicher Primteiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X:X]$, so sind die folgenden Eigenschaften [von G, σ, X, p] äquivalent:*

(1) *σ ist einfach.*

(2) *$\mathfrak{S}G$ ist einfach und nicht abelsch.*

(3) *G ist einfach.*

(4) *$[G:\mathfrak{C}t]$ ist für kein Element $t \neq 1$ aus G eine Primzahlpotenz.*

(5) $(o(\mathfrak{Z}G), p) = 1$.

(6) *$[G:X]$ ist keine Primzahlpotenz.*

(7) $G \neq \mathfrak{N}X$.

BEWEIS. Da $o(G)$ gewiß durch das Quadrat der ungeraden Primzahl p teilbar ist, so ist G sicher nicht isomorph zur symmetrischen Gruppe des Grades 4. Anwendung unseres Einfachheitskriteriums ergibt nun, daß (2) eine Folge von (1) ist.

Ist $\mathfrak{S}G$ einfach und nicht abelsch, ist weiter G nicht einfach, so können wir unser Resultat (C.14) anwenden. Daraus ergibt sich, daß eine Komponente X von σ notwendig primär ist, wenn die ungerade Primzahl p ein gemeinsamer Teiler von $o(X)$ und $[G:X]$ ist. Also ist (3) eine Folge von (2).

Gilt (3), so ist G einfach und nicht abelsch, da die Ordnung von G ja durch p^2 teilbar ist. Anwendung eines Satzes von BURNSIDE ergibt nun, daß die Anzahl der Konjugierten eines Elements $t \neq 1$ aus G keine Primzahlpotenz ist; vgl. BURNSIDE [p. 332, Corollary II]. Also ist (4) eine Folge von (3).

Wir wollen jetzt aus (4) die Bedingung (6) erschließen. Wäre nämlich $[G:X]$ eine Primzahlpotenz, so müßte $[G:X]$ eine Potenz des Primteilers p von $[\mathfrak{N}X:X]$ sein. Da X wegen Zusatz A.6 nilpotent ist, so ist $\mathfrak{Z}X \neq 1$. Ist $x \neq 1$ ein Element aus $\mathfrak{Z}X$, so ist $X \subseteq \mathfrak{C}x$; und mit $[G:X]$ ist auch $[G:\mathfrak{C}x]$ eine Potenz von p. Mit (6) ist also auch (4) falsch, d.h. (6) folgt aus (4). Da,

wie schon bemerkt, $[\mathfrak{N}X:X]=p$ aus Zusatz A.6 folgt, so ist (7) eine Folge von (6).

Wir setzen weiter die Nicht-Einfachheit von σ voraus. Wäre σ eine Frobenius-Partition von G, so würde aus I, Satz 4.1 folgen, daß $\mathfrak{H}G$ eine σ-zulässige, eigentliche, Hallsche, charakteristische Untergruppe von G ist, und daß die nicht in $\mathfrak{H}G$ enthaltenen Komponenten von σ sämtlich normalisatorgleich sind. Da $X=\mathfrak{N}X$ ist, so ist also die Komponente X in der σ-zulässigen Untergruppe $\mathfrak{H}G$ enthalten; und da $\mathfrak{H}G$ eine Hallsche Untergruppe von G ist, und da aus Zusatz A.6 sich ergibt, daß $p-[\mathfrak{N}X:X]$ ein Teiler von $o(X)$ und also auch von $o(\mathfrak{H}X)$ ist, so ist $\mathfrak{N}X$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}G$ und also nilpotent. Nun ist aber X nicht primär, so daß auch $\mathfrak{N}X$ zwar nilpotent, aber nicht primär ist. Anwendung von I, Folgerung 2.3 ergibt das Enthaltensein von $\mathfrak{N}X$ in einer Komponente von σ, woraus der Widerspruch $X=\mathfrak{N}X$ folgt. Also ist σ gewiß keine Frobenius-Partition von G. Nun ist aber σ nicht einfach und mit X ist auch G nicht primär. Anwendung von I, Satz 5.1, (c) ergibt die Existenz einer Komponente Y von σ, die Normalteiler von G mit Primzahlindex $[G:Y]$ ist. Wäre $X\neq Y$, so müßte $o(X)=[G:Y]$ sein, was unmöglich ist. Also ist $X=Y$ ein Normalteiler von G und $G=\mathfrak{N}X$. Mithin folgt aus der Falschheit von (1) die Falschheit von (7), so daß (1) aus (7) folgt und die Äquivalenz der Bedingungen (1), (2), (3), (4), (6), (7) dargetan ist.

Ist (3) richtig, so ist $\mathfrak{Z}G=1$; und also ist (5) eine Folge von (3). — Ist $G=\mathfrak{N}X$, so folgt aus Zusatz A.6, (4), daß p ein Teiler von $o(\mathfrak{Z}G)$ ist; also folgt (7) aus (5). Damit ist auch die Äquivalenz der Bedingungen (1) bis (7) bewiesen.

Bemerkung E.2. Es scheint eine offene Frage zu sein, ob es Partitionen mit Komponenten der in Satz E.1 charakterisierten Art überhaupt gibt. Doch sei darauf hingewiesen, daß die Situation sich völlig ändert, wenn wir auf die Voraussetzung verzichten, daß p ungrade ist. Ist etwa G die symmetrische Gruppe des Grades 5, so ist G selbst nicht einfach, während der Sockel $\mathfrak{S}G$ [die alternierende Gruppe] einfach und nicht abelsch ist. Eine normale, nichttriviale [und notwendig einfache] Partition σ von G besteht aus den zyklischen Untergruppen der Ordnung 5 und den nicht in $\mathfrak{S}G$ enthaltenen zyklischen Untergruppen. Ist S eine zyklische Untergruppe der Ordnung 6, so ist $[\mathfrak{N}S:S]=2$, so daß $[\mathfrak{N}S:S]$ ein Primteiler von $o(S)$ ist. Diese Partition leistet also das Verlangte; sie zeigt weiter die Unentbehrlichkeit von $p\neq 2$ für die Gültigkeit von Satz E.1.

Wir wollen noch eine Reihe weiterer Eigenschaften der in Satz E.1 betrachteten Partitionen herleiten, entweder als Hilfe für ihren Nicht-Existenzbeweis oder für ihr mehr ins einzelne gehende Studium. Wir beginnen mit einer zweiten Reihe charakteristischer Eigenschaften dieser Partitionenklasse, in denen aber die p-Sylow-Untergruppen eine zentrale Rolle spielen.

Satz E.3. *Ist X eine nicht primäre Komponente der normalen Partition σ von G und p ein ungrader gemeinschaftlicher Primteiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X:X]$,*

so sind die folgenden Eigenschaften der p-Sylow-Untergruppe P von G äquivalent:

(a) $G = \mathfrak{N}X$

(b) $\mathfrak{N}P$ *ist* p'*-abgeschlossen.*

(c) $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ *ist keine Frobenius-Partition von* $\mathfrak{N}P$.

(d) $\mathfrak{N}P = P$.

(e) $P \not\subseteq (\mathfrak{N}P)'$.

(f) $\mathfrak{N}\mathfrak{Z}P = \mathfrak{C}\mathfrak{Z}P$.

(g) *Es gibt eine charakteristische Untergruppe R von P mit p'-abgeschlossenem Normalisator $\mathfrak{N}R$.*

(h) G *ist* p'*-abgeschlossen.*

BEWEIS. Sei zunächst $G = \mathfrak{N}X$. Dann folgt aus Zusatz A.6, daß $[\mathfrak{N}X : X] = p$ ist, und daß die Elemente aus X mit zu p teilerfremder Ordnung eine charakteristische Untergruppe Y von X bilden. Es folgt, daß Y ein Normalteiler von $\mathfrak{N}X = G$ und $o(Y)$ zu p teilerfremd ist, während $G/Y = \mathfrak{N}X/Y$ eine p-Gruppe ist. Also folgt (h) aus (a). Gilt (h), so ist G nicht einfach und $G = \mathfrak{N}X$ folgt aus Satz E.1, womit die Äquivalenz von (a) und (h) dargetan ist.

Mit G ist jede Untergruppe von G eine p'-abgeschlossene Gruppe, so daß (b) aus (h) folgt. Gilt (b), so ist $\mathfrak{N}P$ das direkte Produkt seines Normalteilers P und des Normalteilers Q von $\mathfrak{N}P$, der aus allen Elementen aus $\mathfrak{N}P$ mit zu p teilerfremder Ordnung besteht. Wäre $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}P$, so würde aus I, Satz 4.1 folgen, daß $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ eine eigentliche, Hallsche, charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}P$ ist, und daß jeder Normalteiler von $\mathfrak{N}P$ entweder $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ enthält oder in $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ enthalten ist. Da aber $P \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ ist, so sind beide Alternativen unmöglich; und wir haben (c) aus (b) abgeleitet.

Wir schieben jetzt den Nachweis einer von der Gültigkeit der Bedingungen (a) bis (h) unabhängigen Eigenschaft ein.

(+) *P ist in keiner Komponente von σ enthalten und $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ ist eine normale, nicht-einfache Partition von $\mathfrak{N}P$.*

Da $o(X)$ ein Vielfaches von p ist, so gibt es ein Element g in G mit $X \cap P^g \neq 1$ Wäre P in der Komponente Y enthalten, so wäre auch $X \cap Y^g \neq 1$. Da σ normal und also Y^g ebenfalls eine Komponente von σ ist, so ist $X = Y^g$ und es wäre also die p-Sylow-Untergruppe P^g von G in X enthalten. Dann wäre aber $[G : X]$ und a fortiori $[\mathfrak{N}X : X]$ zu p teilerfremd, was unseren Voraussetzungen widerspricht. Also ist P in keiner Komponente von σ enthalten. Die normale Partition $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ von $\mathfrak{N}P$ ist also sicher nicht trivial. Da $P \neq 1$ ein p-Normalteiler von $\mathfrak{N}P$ und $p \neq 2$ ist, so folgt schließlich die Nicht-Einfachheit von $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ aus II, Satz A.

Wir nehmen als nächstes die Gültigkeit von (c) an. Wäre $P \neq \mathfrak{N}P$, so wäre $\mathfrak{N}P$ nicht primär. Wäre $\mathfrak{N}P$ nilpotent, so würde sich aus I, Folgerung 2.3 ergeben, daß $\mathfrak{N}P$ in einer Komponente von σ enthalten und $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ im Wider-

spruch zu (+) trivial ist. Also ist $\mathfrak{N}P$ nicht nilpotent. Da $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ eine normale, nicht-einfache Partition [wegen (+)] der nicht primären Gruppe $\mathfrak{N}P$ und wegen (c) keine Frobenius-Partition ist, so ergibt sich aus I, Satz 5.1, (c) die Existenz einer Komponente W von $\sigma \cap \mathfrak{N}P$, die ein Normalteiler von $\mathfrak{N}P$ mit Primzahlindex $[\mathfrak{N}P : W]$ ist. Aus (+) folgt, daß P nicht in W enthalten ist. Also ist $p = [\mathfrak{N}P : W]$ und $PW = \mathfrak{N}P$. Da W nicht normalisatorgleich ist, so ergibt sich aus einem Kegelschen Satz die Nilpotenz von W; vgl. KEGEL [Satz 2]. Als Produkt seiner beiden nilpotenten Normalteiler P und W ist $\mathfrak{N}P$ nilpotent; und dies ist ein Widerspruch. Also ist $P = \mathfrak{N}P$; und wir haben (d) aus (c) hergeleitet.

Es ist klar, daß (e) aus (d) folgt. Gilt (e), so folgt aus Satz A.11 die p'-Abgeschlossenheit von G, d.h. (h); und damit ist die Äquivalenz der Bedingungen (a), (b), (c), (d), (e) und (h) dargetan.

Ist G eine p'-abgeschlossene Gruppe, so ist bekanntlich $\mathfrak{N}\mathfrak{Z}P/\mathfrak{C}\mathfrak{Z}P$ eine p-Gruppe. Da aber $\mathfrak{Z}P$ von P zentralisiert wird, so gilt $\mathfrak{N}\mathfrak{Z}P = P \cdot \mathfrak{C}\mathfrak{Z}P = \mathfrak{C}\mathfrak{Z}P$; und wir haben (f) aus (a) hergeleitet. — Gilt umgekehrt (f), so ist $\mathfrak{N}P \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{Z}P = \mathfrak{C}\mathfrak{Z}P$, da ja $\mathfrak{Z}P$ eine charakteristische Untergruppe von P ist. Also liegt $\mathfrak{Z}P \neq 1$ im Zentrum von $\mathfrak{N}P$, so daß $\mathfrak{Z}\mathfrak{N}P \neq 1$ ist. Aus Lemma A.17 folgt dann, daß $\sigma \cap \mathfrak{N}P$ keine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}P$ ist. Damit haben wir (c) aus (f) hergeleitet und die Äquivalenz von (a), (c), (f) dargetan.

Es ist trivial, daß (g) aus (b) folgt. Ist umgekehrt R eine charakteristische Untergruppe von P mit p'-abgeschlossenem $\mathfrak{N}R$, so ist $\mathfrak{N}P \subseteq \mathfrak{N}R$; und hieraus folgt (b), da ja Untergruppen p'-abgeschlossener Gruppen selbst p'-abgeschlossen sind. Damit ist die Äquivalenz aller Bedingungen (a) bis (h) dargetan.

ZUSATZ E.4. *Ist X eine nicht primäre Komponente der normalen, einfachen Partition σ von G und p ein ungrader gemeinschaftlicher Primteiler von $o(X)$ und $[\mathfrak{N}X : X]$, so sind die p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ elementar-abelsch der Ordnung p^2; und $\mathfrak{N}X$ ist dann und nur dann keine Hallsche Untergruppe von G, wenn die p-Sylow-Zentren zyklisch der Ordnung p sind.*

BEWEIS. Wir folgern zunächst aus Zusatz A.6, daß $[\mathfrak{N}X : X] = p$, X nilpotent ist und daß die Elemente mit zu p teilerfremder Ordnung aus X [und $\mathfrak{N}X$] eine Hallsche Untergruppe Y von G bilden.

Sei nun P eine p-Sylow-Untergruppe von G derart, daß $o(P \cap \mathfrak{N}X)$ durch p^3 teilbar ist, daß aber P nicht in $\mathfrak{N}X$ enthalten ist. Aus den bekannten Eigenschaften der p-Gruppen folgt dann die Existenz eines nicht in $\mathfrak{N}X$ enthaltenen, $P \cap \mathfrak{N}X$ normalisierenden Elements w aus P. Aus $[\mathfrak{N}X : X] = p$ folgt, daß $[P \cap \mathfrak{N}X : P \cap X]$ entweder 1 oder p ist. Also ist auch $[(P \cap \mathfrak{N}X)^w : (P \cap X)^w] = [P \cap \mathfrak{N}X : P \cap X^w]$ ein Teiler von p; und $[P \cap \mathfrak{N}X : (P \cap X) \cap (P \cap X^w)]$ ist folglich ein Teiler von p^2. Da p^3 ein Teiler von $o(P \cap \mathfrak{N}X)$ ist, so muß $X \cap X^w \neq 1$ sein; und da mit X auch X^w eine Komponente der normalen Partition σ ist, so wird $X = X^w$, so daß w zu $\mathfrak{N}X$ gehört. Dies ist ein Widerspruch, aus dem das Zwischenresultat folgt:

(+) Ist P eine p-Sylow-Untergruppe von G derart, daß p^3 ein Teiler von $o(P \cap \mathfrak{N}X)$ ist, so ist P in $\mathfrak{N}X$ enthalten.

Es gibt eine p-Sylow-Untergruppe P von G derart, daß $P \cap \mathfrak{N}X$ eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}X$ ist. Wäre p^3 ein Teiler von $o(\mathfrak{N}X)$, so wäre p^3 auch ein Teiler von $o(P \cap \mathfrak{N}X)$; und durch Anwendung von (+) ergibt sich $P \leqq \mathfrak{N}X$. Sei t ein Element aus $\mathfrak{N}P$. Aus $[\mathfrak{N}X : X] = p$ folgt zunächst $[P : P \cap X] = p$; und hieraus folgt

$$p = [P^t : (P \cap X)^t] = [P : P \cap X^t].$$

Dann ist $[P : (P \cap X) \cap (P \cap X^t)]$ ein Teiler von p^2; und da $o(P)$ ein Vielfaches von p^3 ist, so ist sicherlich $X \cap X^t \neq 1$. Da X^t mit X Komponente der normalen Partition σ ist, so wird $X = X^t$; und wir haben $\mathfrak{N}P \leqq \mathfrak{N}X$ gezeigt. Nun haben wir bereits am Anfang des Beweises die p'-Abgeschlossenheit von $\mathfrak{N}X$ [wenigstens implicite] erwähnt. Folglich ist auch die Untergruppe $\mathfrak{N}P$ von $\mathfrak{N}X$ eine p'-abgeschlossene Gruppe. Kombination der Sätze E.1 und E.3 ergibt die Nicht-Einfachheit von σ. Dies widerspricht unserer Voraussetzung. Also ist p^3 kein Teiler von $o(\mathfrak{N}X)$. Da $p = [\mathfrak{N}X : X]$ ein Teiler von $o(X)$ ist, so ist p^2 ein Teiler von $o(\mathfrak{N}X)$. Also ist p^2 die genaue Ordnung der p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}X$. Diese können nicht zyklisch sein, da die nicht in X enthaltenen p-Elemente aus $\mathfrak{N}X$ sämtlich die Ordnung p haben, und da es solche gibt. Also sind die p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ elementar-abelsch der Ordnung p^2.

Sind die p-Sylow-Zentren von G zyklisch der Ordnung p, so sind die p-Sylow-Untergruppen von G gewiß nicht abelsch, da ihre Ordnung ja wenigstens p^2 ist. Also können die p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ nicht gleichzeitig p-Sylow-Untergruppen von G sein; und $\mathfrak{N}X$ ist gewiß keine Hallsche Untergruppe von G. — Seien jetzt umgekehrt die p-Sylow-Zentren von G nicht zyklisch der Ordnung p. Es gibt eine p-Sylow-Untergruppe P von G derart, daß $P \cap \mathfrak{N}X$ eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}X$ ist. Dann ist $P \cap X$ eine p-Sylow-Untergruppe von X, da ja X ein Normalteiler von $\mathfrak{N}X$ ist. Insbesondere ist $P \cap X \neq 1$; und da X eine Komponente der normalen Partition σ von G ist, so ist $\mathfrak{Z}P \leqq \mathfrak{N}X$ wegen I, Lemma 2.5. Da $o(\mathfrak{Z}P)$ nach Voraussetzung ein Vielfaches der Ordnung p^2 der p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ ist, so folgt $\mathfrak{Z}P = P \cap \mathfrak{N}X$. Insbesondere ist $X \cap \mathfrak{Z}P = X \cap P \neq 1$; und aus I, Lemma 2.5 folgt $P \leqq \mathfrak{N}X$. Also ist die p-Sylow-Untergruppe P von G eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{N}X$, so daß die p-Sylow-Untergruppen von $\mathfrak{N}X$ auch p-Sylow-Untergruppen von G sind. Es ist also $([G : \mathfrak{N}X], p) = 1$. Da $\mathfrak{N}X = Y P$ und Y eine Hallsche Untergruppe von G mit $(o(Y), p) = 1$ ist, so ist $\mathfrak{N}X$ eine Hallsche Untergruppe von G.

FOLGERUNG E.5. *Ist X eine nicht-primäre Komponente der normalen Partition σ von G und p ein ungrader Primteiler von $(o(X), [\mathfrak{N}X : X])$, so ist dann und nur dann $G = \mathfrak{N}X$, wenn $p^2 - 1$ und $[\mathfrak{N}P : P]$ für p-Sylow-Untergruppen P von G keinen gemeinsamen ungraden Primteiler besitzen.*

BEWEIS. Ist zunächst $G = \mathfrak{N}X$, so ist $P = \mathfrak{N}P$ für p-Sylow-Untergruppen P von G [wegen Satz E.3, (d)], woraus die Notwendigkeit unserer Bedingung folgt.

Sei umgekehrt $G \neq \mathfrak{N}X$. Es gibt eine p-Sylow-Untergruppe P von G, die X und $\mathfrak{N}X$ in p-Sylow-Untergruppen $X \cap P$ von X bzw. $P \cap \mathfrak{N}X$ von $\mathfrak{N}X$ schneidet. Es folgt aus Zusatz E.4, daß $P \cap \mathfrak{N}X$ elementar-abelsch der Ordnung p^2 ist, woraus sich $o(P \cap X) = p$ ergibt. Weiter entnehmen wir Zusatz E.4, daß entweder $o(\mathfrak{Z}P) = p$ oder $P = P \cdot \mathfrak{N}X$ ist. Schließlich ergibt sich $P \neq \mathfrak{N}P$ aus Satz E.3, (d).

Aus Satz E.3 folgt wegen $G \neq \mathfrak{N}X$, daß $\sigma \cdot \mathfrak{N}P$ eine Frobenius-Partition von $\mathfrak{N}X$ ist. Natürlich ist $P \leqq \mathfrak{F}\mathfrak{N}P$. Wäre $P \neq \mathfrak{F}\mathfrak{N}P$, so wäre $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ nicht primär; und es ergäbe sich aus I, Folgerung 2.3 die Existenz einer $\mathfrak{F}\mathfrak{N}P$ enthaltenden Komponente W von σ. Dann wäre auch P in W enthalten; und dies ist unmöglich, da einige, aber nicht alle Elemente ($\neq 1$) aus P zu X gehören. Also ist $P = \mathfrak{F}\mathfrak{N}P$; und es folgt aus I, Satz 4.1, (5), daß $1 = P \cap \mathfrak{C}t$ für jedes nicht in P enthaltene Element t aus $\mathfrak{N}P$ gilt.

Wäre $[\mathfrak{N}P : P]$ grade, so gäbe es ein Element s mit $o(s) = 2$ in $\mathfrak{N}P$. Da s nicht in P liegen kann, so folgt aus einem Resultat von Burnside, daß $y^s = y^{-1}$ für jedes y aus P gilt; vgl. Burnside, p. 90. Insbesondere wird also $1 \neq P \cap X$ von s normalisiert, so daß s wegen I, Lemma 2.5 zu $\mathfrak{N}X$ gehört. Wegen Zusatz A.6 ist aber X nilpotent und enthält alle Elemente aus $\mathfrak{N}X$, deren Ordnung von p verschieden ist. Folglich liegt s in X und ist mit den Elementen aus $P \cap X$ vertauschbar. Dies ist ein Widerspruch, so daß $[\mathfrak{N}P : P]$ ungrade ist.

Da $\mathfrak{Z}P$ eine charakteristische Untergruppe des Normalteilers P von $\mathfrak{N}P$ ist, so induzieren die Elemente aus $\mathfrak{N}P$ in $\mathfrak{Z}P$ eine Gruppe von Automorphismen, die im wesentlichen mit $\mathfrak{N}P/P$ identisch ist, da ja $1 = P \cap \mathfrak{C}t$ für jedes nicht in P enthaltene t aus $\mathfrak{N}P$ gilt. Nun ist, wie oben bemerkt, $\mathfrak{Z}P$ entweder zyklisch der Ordnung p oder elementar-abelsch der Ordnung p^2; und $[\mathfrak{N}P : P]$ ist also ein zu $2p$ teilerfremder Teiler der Ordnung der Automorphismengruppe von $\mathfrak{Z}P$. Folglich ist $[\mathfrak{N}P : P]$ ein von 1 verschiedener ungrader Teiler von $p^2 - 1$; und damit ist auch das Hinreichen unserer Bedingung erwiesen.

Literatur

[1] Baer, Reinhold: Classes of finite groups and their properties. Illinois J. Math. **1**, 115—187 (1957).

[2] — Partitionen endlicher Gruppen; zitiert als I. Math. Z. **75**, 333—372 (1961).

[3] — Einfache Partitionen endlicher Gruppen mit nicht-trivialer Fittingscher Untergruppe; zitiert als II. Arch. Math. **12**, 81—89 (1960).

Burnside, W.: Theory of groups of finite order, 2nd edition. Cambridge 1911.

Hall jr., M.: The theory of groups. New York 1959.

Kegel, O. H.: Die Nilpotenz der H_p-Gruppen. Math. Z. **75**, 373—376 (1961).

Specht, W.: Gruppentheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

Thompson, John G.: Normal p-complements for finite groups. Math. Z. **72**, 332—354 (1960).

Zassenhaus, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. Leipzig u. Berlin 1937.

Mathematisches Seminar der Universität Frankfurt am Main

(Eingegangen am 3. März 1961)

Meister, E.
Math. Zeitschr. 77, 38—44 (1961)

Ein Eindeutigkeitsbeweis für ein gemischtes Randwertproblem der Schwingungsgleichung

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von
Erhard Meister

§ 1. Einleitung

Im Jahre 1912 hat A. Sommerfeld [1] die bekannte Ausstrahlungsbedingung eingeführt, die die eindeutige Lösbarkeit der ersten Randwertaufgabe für die Schwingungsgleichung $\Delta\varphi + k^2 \cdot \varphi = 0$ und das Äußere eines endlichen Bereichs garantieren sollte. Zusätzlich benötigten er und W. Magnus [2] die Beschränktheitsbedingung $\varphi = O\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right)$ für $r \to \infty$ (n die Dimension des Raumes). In einer späteren Arbeit konnte W. Magnus [3] die letzte Bedingung fallen lassen. Er benutzte dabei ein berühmt gewordenes Ergebnis von F. Rellich [4]. Es besagt, daß jede im Außenraum eines endlichen regulären Bereichs $\mathfrak{B}$ zweimal stetig differenzierbare Lösung der Schwingungsgleichung, die der allgemeinen Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{\Sigma_R} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial R} - i k \varphi \right|^2 dS = 0 \tag{1.1}$$

genügt, die Eigenschaft

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{\Sigma_R} |\varphi|^2 dS \neq 0 \tag{1.2}$$

hat, es sei denn $\varphi \equiv 0$. Σ_R bezeichne dabei eine $(n-1)$-Sphäre vom Radius R um einen festen Raumpunkt. R. Leis [5] erweiterte diese Aussagen für das Äußere eines endlichen regulären Bereichs auf das zweite und dritte Randwertproblem.

Für ein unbeschränktes Gebiet, dessen Rand ins Unendliche läuft, sind noch längst nicht entsprechende Resultate erzielt worden. Der oben erwähnte Satz von Rellich gilt aber auch — wie er selbst in der genannten Arbeit gezeigt hat — für paraboloidähnliche, unendliche Gebiete. In neuerer Zeit haben D. S. Jones [6] und W. L. Miranker [7] Eindeutigkeitstheoreme für spezielle (konische) unbeschränkte Gebiete bewiesen. Die Integration in (1.1) ist dann nur über den Durchschnitt des Gebietes mit der Hyperkugel Σ_R zu erstrecken. Andererseits haben Rellich [8] und Jones [l.c.] gezeigt, daß es unendliche Gebiete gibt, zu denen die Schwingungsgleichung bei homogenen Randbedingungen Punkteigenwerte hat, wenn man die Ausstrahlungsbedingung fallen läßt.

In der Aerodynamik oder Beugungstheorie stößt man auf Randwertprobleme für $\Delta\varphi + k^2 \cdot \varphi = 0$, bei denen die Ränder der betrachteten Gebiete

sog. Gitter mit periodischer Struktur sind. Wir werden sie noch genau definieren. Die bisher bekanntgewordenen Eindeutigkeitssätze lassen sich nicht hier anwenden. Im folgenden Abschnitt soll die eindeutige Lösbarkeit eines gemischten Randwertproblems bewiesen werden.

§ 2. Eindeutigkeitssatz für ein gemischtes Randwertproblem

Wir wollen beweisen den folgenden

SATZ. VOR.: $\varphi(x, y)$ *sei eine zweimal stetig differenzierbare, komplexwertige Funktion in dem Gittergebiet* $\mathfrak{G}$ *mit* $\partial\mathfrak{G} = \{(x, y) \mid 0 \leqq x < \infty,\ y = n \cdot T,\ n$ *ganz*, $T > 0$ *fest*$\}$. *Sie genüge dort den Bedingungen:*

1. $\Delta\varphi + k^2 \cdot \varphi = 0, \quad k > 0.$

2. $\varphi(x, y + n \cdot T) = e^{i n \delta} \cdot \varphi(x, y)$ *mit ganzem* n *und festem* $0 \leqq \delta < 2\pi$.

3. a) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, n \cdot T \pm 0) = 0$ *für* $0 < x < 1$

   b) $\varphi(x, n \cdot T \pm 0) = 0$ *für* $1 < x < \infty$ $\Big\}$ n *ganz.*

4. a) $\operatorname{grad}\varphi = O\left([x^2 + (y - n \cdot T)^2]^{-\mu/2}\right)$ *für* $(x, y) \to (0, n \cdot T)$ *mit* $0 \leqq \mu < 1$, n *ganz.*

   b) $\operatorname{grad}\varphi = O(1)$ *für* $(x, y) \to (1, n \cdot T)$, n *ganz.*

5. φ *und* $\operatorname{grad}\varphi = O(1)$ *für* $|x| \to \infty$ *und* φ *enthalte nur solche Terme, die auslaufenden Wellen entsprechen.*

BEH.: $\varphi \equiv 0$ *in* $\mathfrak{G}$.

BEWEIS. Zur Abkürzung führen wir ein:

$$\mathfrak{S}_- \overset{\text{Def.}}{=} \{(x, y) \mid -\infty < x < 0,\ 0 < y < T\}, \tag{2.1a}$$

$$\mathfrak{S}_0 \overset{\text{Def.}}{=} \{(x, y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < T\}, \tag{2.1b}$$

$$\mathfrak{S}_+ \overset{\text{Def.}}{=} \{(x, y) \mid 1 < x < \infty,\ 0 < y < T\}. \tag{2.1c}$$

Auf Grund der Periodizitätsbedingung 2. reicht es aus zu zeigen, daß $\varphi \equiv 0$ ist in $\overline{\mathfrak{S}}_- \cup \overline{\mathfrak{S}}_0 \cup \overline{\mathfrak{S}}_+$. Wir wollen zunächst in einem Lemma Darstellungen von φ, das 1. bis 5. genügt, in den drei Gebieten $\mathfrak{S}$ angeben.

LEMMA. *Genügt* φ *den im Satz geforderten Eigenschaften, dann läßt es sich darstellen in der Form*

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cdot \exp\left[x \cdot \sqrt{\left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2 - k^2} + i\, y\, \frac{2\pi n + \delta}{T}\right], \quad (x, y) \in \mathfrak{S}_-, \tag{2.2a}$$

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Bigg\{ & C_n \cdot \exp\left[(x - 1)\sqrt{\left(\frac{\pi n}{T}\right)^2 - k^2}\right] + \\ & + D_n \cdot \exp\left[-x\sqrt{\left(\frac{\pi n}{T}\right)^2 - k^2}\right]\Bigg\} \cos\frac{\pi n y}{T}, \quad (x, y) \in \mathfrak{S}_0, \end{aligned}\right. \tag{2.2b}$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \cdot \exp\left[-(x - 1)\sqrt{\left(\frac{\pi n}{T}\right)^2 - k^2}\right] \cdot \sin\frac{\pi n y}{T}, \quad (x, y) \in \mathfrak{S}_+. \tag{2.2c}$$

Die Quadratwurzeln sind positiv für positive Radikanden und positiv imaginär für negative Radikanden, wenn wir $e^{i\omega t}$ als Zeitfaktor wählen. $A_n, \ldots, E_n$ sind Konstanten. Die Reihen konvergieren absolut und gleichmäßig in jedem kompakten Teilbereich.

BEWEIS DES LEMMAS. a) Da $\partial\mathfrak{G}$ in $x \geqq 0$ liegt, so muß $\varphi(x, y)$ in $x < 0$ zweimal stetig differenzierbare Lösung der Schwingungsgleichung sein. Da die Bedingung 2. von x unabhängig ist in dieser Halbebene, versuchen wir spezielle Lösungen mittels der Methode der Separation zu finden. Mit dem Ansatz $\varphi(x, y) = \psi(x) \cdot \chi(y)$ gewinnen wir aus $\Delta\varphi + k^2 \cdot \varphi = 0$ die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\psi''(x) - (\lambda^2 - k^2)\,\psi(x) = 0 \quad \text{in } x < 0, \tag{2.3a}$$

$$\chi''(y) + \lambda^2 \chi(y) = 0 \quad \text{in } -\infty < y < +\infty. \tag{2.3b}$$

Die Periodizitätsbedingung 2. für $\varphi(x, y)$ führt insbesondere zu den Relationen $\varphi(x, T) - e^{i\delta} \cdot \varphi(x, 0) = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, T) - e^{i\delta} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = 0$ für $x < 0$. Diese beiden Gleichungen liefern mit (2.3b) für $\chi(y)$ in $0 \leqq y \leqq T$ ein selbstadjungiertes Eigenwertproblem zu den Randbedingungen

$$\chi(T) - e^{i\delta} \cdot \chi(0) = 0, \tag{2.4a}$$

$$\chi'(T) - e^{i\delta} \cdot \chi'(0) = 0. \tag{2.4b}$$

Die allgemeine Lösung von (2.3b) ist $\chi(y) = A \cdot e^{i\lambda y} + B \cdot e^{-i\lambda y}$. Die Bedingungen (2.4) ergeben nur dann nichttriviale Lösungen, die Eigenfunktionen $\chi_n^-(y)$, wenn $\lambda = (2\pi n + \delta)/T$ ist mit ganzzahligem n.

$$\chi_n^-(y) = \exp\left[i\,y \cdot \frac{2\pi n + \delta}{T}\right]. \tag{2.5}$$

Diese Funktionen sind für $-\infty < y < +\infty$ beliebig oft differenzierbar und genügen der Bedingung $\chi(y + m \cdot T) = e^{im\delta} \cdot \chi(y)$. Sie bilden dann im Raume $L_2(0, T)$ ein vollständiges Orthogonalsystem mit der Eigenschaft, daß sich jede in $0 \leqq y \leqq T$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, die den Randbedingungen genügt, in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den $\chi_n^-(y)$ entwickeln läßt (KAMKE [9]). Das gilt insbesondere für φ, also

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \cdot \exp\left[i\,y\,\frac{2\pi n + \delta}{T}\right].$$

Diese Reihe ist in $x < 0$ sogar beliebig oft stetig differenzierbar als Lösung der Schwingungsgleichung. Setzen wir die Reihe in diese ein, so folgt durch Koeffizientenvergleich, daß $\psi_n(x)$ der Gl. (2.3a) mit $\lambda = (2\pi n + \delta)/T$ genügt, d.h. es ist

$$\psi_n(x) = A_n \cdot \exp\left[x \cdot \sqrt{\left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2 - k^2}\right] + B_n \cdot \exp\left[-x\sqrt{\left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2 - k^2}\right] \tag{2.6}$$

für ganzzahlige n. Die Bedingung 5. des Satzes fordert $B_n = 0$, wenn die Quadratwurzel positiv imaginär gewählt wird für negative Radikanden. Setzen wir dann $\psi_n(x)$ oben ein, so resultiert die Reihe (2.2a).

b) Im Gebiet $\mathfrak{S}_0$ erhalten wir durch Separation für $\chi(y)$ das selbstadjungierte Eigenwertproblem

(2.7a) $$\chi''(y) + \lambda^2 \cdot \chi(y) = 0 \quad \text{in} \quad 0 \leqq y \leqq T \quad \text{mit}$$

(2.7b) $$\chi'(0) = \chi'(T) = 0$$

mit den Eigenfunktionen

(2.8) $$\chi_n^0(y) = \cos \frac{\pi n y}{T}; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Analoge Überlegungen wie im Fall a) führen dazu, daß sich φ in $\mathfrak{S}_0$ in die Reihe (2.2b) entwickeln läßt, die dort absolut und gleichmäßig in jedem Kompaktum konvergiert. Es ist nur zu beachten, daß jetzt keine Bedingung 5. des Satzes wirksam wird, so daß die C_n und D_n erscheinen.

c) Im Gebiet $\mathfrak{S}_+$ schließlich lautet das selbstadjungierte Eigenwertproblem für das separierte $\chi(y)$:

(2.9a) $$\chi''(y) + \lambda^2 \cdot \chi(y) = 0 \quad \text{in} \quad 0 \leqq y \leqq T \quad \text{mit}$$

(2.9b) $$\chi(0) = \chi(T) = 0$$

mit den Eigenfunktionen

(2.10) $$\chi_n^+(y) = \sin \frac{\pi n y}{T}; \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Hieraus resultiert dann analog wie in a) die Entwicklung (2.2c)

Fortsetzung des Beweises des Satzes: Sei $\frac{\pi r}{T} \leqq k < \frac{\pi (r+1)}{T}$ mit festem $r = 0, 1, 2, \ldots$. In der Entwicklung (2.2c) sind dann in den r Termen am Anfang die Radikanden negativ. Wir schreiben daher für $(x, y) \in \mathfrak{S}_+$:

(2.11) $$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{r} E_n \cdot \exp\left[-i(x-1) \cdot \sqrt[+]{k^2 - \left(\frac{\pi n}{T}\right)^2} \right] \cdot \sin \frac{\pi n y}{T} + \varphi_\varepsilon^+$$

mit φ_ε^+ und grad $\varphi_\varepsilon^+ = O(e^{-\varepsilon x})$ für $x \to +\infty$ in $0 \leqq y \leqq T$ gleichmäßig. Hierbei ist $\varepsilon = \sqrt[+]{\frac{\pi^2 (r+1)^2}{T^2} - k^2} > 0$. Wegen $0 \leqq \delta < 2\pi$ sind dann die Wurzeln in der Entwicklung (2.2a) positiv, für die $n \geqq \left[\frac{kT - \delta}{2\pi} \right] + 1 \overset{\text{Def.}}{=} N + 1$ bzw. $n \leqq -\left[\frac{kT - \delta}{2\pi} \right] - 1 \overset{\text{Def.}}{=} -M - 1$. Für $(x, y) \in \mathfrak{S}_-$ können wir daher schreiben

(2.12) $$\varphi(x, y) = \sum_{n=-M}^{N} A_n \cdot \exp\left[i x \cdot \sqrt[+]{k^2 - \left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2} \right] \cdot \exp\left[i y \frac{2\pi n + \delta}{T} \right] + \varphi_\varepsilon^-$$

mit φ_ε^- und grad $\varphi_\varepsilon^- = O(e^{\varepsilon x})$ für $x \to -\infty$ in $0 \leqq y \leqq T$ gleichmäßig mit $\varepsilon = \operatorname{Min}_{\nu \to \infty} \sqrt{\left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2 - k^2} > 0$.

Sei nun $\mathfrak{S}_{L_1 L_2}^*$ das Rechteck $-L_1 \leqq x \leqq L_2$, $0 \leqq y \leqq T$ mit $L_1 > 0$, $L_2 > 1$. Wir wenden den ersten Greenschen Satz auf φ und $\bar{\varphi}$ an und erhalten

(2.13) $$\iint_{\mathfrak{S}_{L_1 L_2}^*} (\varphi \, \Delta \bar{\varphi} + |\operatorname{grad} \varphi|^2) \, dx \, dy - \int_{\partial \mathfrak{S}_{L_1 L_2}^*} \varphi \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \, ds = 0.$$

Dabei sei $\mathfrak{S}^*_{L_1 L_2}$ aus $\mathfrak{S}_{L_1 L_2}$ dadurch entstanden, daß wir bei den Punkten $(x, y) = (0, 0)$ und $(0, T)$ beliebig kleine Halbkreisscheiben ausgelassen haben. Wegen $\Delta \overline{\varphi} = -k^2 \cdot \overline{\varphi}$ und der Bedingung 4.a) dürfen wir $\mathfrak{S}^*_{L_1 L_2}$ durch $\mathfrak{S}_{L_1 L_2}$ ersetzen und erhalten

$$(2.14) \qquad \iint\limits_{\mathfrak{S}_{L_1 L_2}} \left(-k^2 \cdot |\varphi|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2\right) dx\, dy - \int\limits_{\partial \mathfrak{S}_{L_1 L_2}} \varphi \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n}\, ds = 0.$$

Die Beiträge im Randintegral, die von den Strecken $y = 0$ bzw. $y = T$, $-L_1 \leqq x \leqq L_2$ herrühren, verschwinden, da für $0 < x < 1$ $\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y} = 0$ ist, für $1 < x \leqq L_2$ $\varphi = 0$ ist nach Bedingung 3.a) und b), und auf $-L_1 \leqq x < 0$ gilt wegen Bedingung 2.:

$$(2.15) \qquad \begin{cases} -\int\limits_{-L_1}^{0} \varphi(x, 0) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y}(x, 0)\, dx + \int\limits_{0}^{-L_1} \varphi(x, T) \cdot \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y}(x, T) \cdot (-dx) \\ = -\int\limits_{-L_1}^{0} \left\{ \varphi(x, 0) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y}(x, 0) - e^{i\delta} \cdot \varphi(x, 0)\, e^{-i\delta} \cdot \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y}(x, 0) \right\} dx = 0. \end{cases}$$

Wir berechnen nun die Beiträge über die vertikalen Randstücke:

$$(2.16a) \qquad \int\limits_{0}^{T} \varphi(L_2, y) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x}(L_2, y)\, dy = \frac{iT}{2} \sum_{n=1}^{r} |E_n|^2 \cdot {}_+\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{T}\right)^2} + O(e^{-\varepsilon L_2})$$

für $L_2 \to +\infty$ und

$$(2.16b) \qquad \begin{cases} -\int\limits_{0}^{T} \varphi(-L_1, y) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x}(-L_1, y)\, dy \\ = iT \cdot \sum_{n=-M}^{N} |A_n|^2 \cdot {}_+\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2} + O(e^{-\varepsilon L_1}) \end{cases}$$

für $L_1 \to +\infty$.

Lassen wir nun $L_1, L_2 \to +\infty$ streben, so erhalten wir aus (2.14):

$$\lim_{L_1, L_2 \to \infty} \left\{ \iint\limits_{\mathfrak{S}_{L_1 L_2}} \left[-k^2 |\varphi|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2\right] dx\, dy - \right.$$
$$\left. - \frac{iT}{2} \sum_{n=1}^{r} |E_n|^2 \cdot {}_+\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{T}\right)^2} - iT \cdot \sum_{n=-M}^{N} |A_n|^2 \cdot {}_+\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2} \right\} = 0.$$

Da die Summen rechts von L_1, L_2 nicht abhängen und rein imaginär sind, das Doppelintegral aber reell, so müssen die Grenzwerte getrennt existieren und es muß sein,

$$(2.17a) \qquad \begin{cases} \iint\limits_{\mathfrak{S}} \left[-k^2 |\varphi|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2\right] dx\, dy = 0 \\ \text{mit} \quad \mathfrak{S} = \{(x, y) | -\infty < x < +\infty,\ 0 < y < T\}, \end{cases}$$

$$(2.17b) \qquad \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{r} |E_n|^2 \cdot {}_+\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{T}\right)^2} + T \cdot \sum_{n=-M}^{N} |A_n|^2 \cdot {}_+\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n + \delta}{T}\right)^2} = 0.$$

Wenn keine Wurzel verschwindet, dann resultiert aus (2.17b) $E_n=0$ für $n=1,\ldots,r$ und $A_n=0$ für $n=-M,\ldots,N$. Ist $k=\pi r/T$, dann könnte zunächst $E_r\neq 0$ sein, ebenso für $k=(2\pi N+\delta)/T$ $A_N\neq 0$ und für $k=(-2\pi M+\delta)/T$ $A_{-M}\neq 0$ sein könnten. Stets müssen jedoch $E_n=0$ für $n=1,\ldots,r-1$ und $A_n=0$ für $n=-M+1,\ldots,N-1$ sein. In den Ausnahmefällen ist

$$\varphi(x,y)=E_r\cdot\sin\frac{\pi r y}{T}+\varphi_\varepsilon^+ \qquad (x,y)\in\mathfrak{S}_+$$

$$\varphi(x,y)=A_{-M}\cdot\exp\left[i\,y\cdot\frac{-2\pi M+\delta}{T}\right]+A_N\cdot\exp\left[i\,y\cdot\frac{2\pi N+\delta}{T}\right]+\varphi_\varepsilon^- \quad (x,y)\in\mathfrak{S}\ .$$

Die durch E_r, A_{-M}, A_N gekennzeichneten Terme stellen aber keine ins Unendliche auslaufenden Wellentypen sondern stehende dar. Die Bedingung 5. des Satzes schließt diese aber aus, so daß: $E_r=0$, $A_{-M}=A_N=0$ sein müssen. $\varphi(x,y)$ verhält sich dann für $|x|\to\infty$ wie $O(e^{-\varepsilon|x|})$ gleichmäßig in $0\leqq y\leqq T$.

Für $x\neq 0$ und 1 gilt wegen der Stetigkeit von φ und grad φ dort *):

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\int_0^T\left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2-\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2+k^2|\varphi|^2\right]dy\\
&=2\int_0^T\left[\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}\right)-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial y}\right)+k^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}\cdot\varphi\right)\right]dy\\
&=-2\,\mathrm{Re}\int_0^T\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial y}\right]dy \quad \text{wegen} \quad \Delta\varphi+k^2\varphi=0\\
&=-2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial y}\right\}_{y=0}^{T}+2\,\mathrm{Re}\int_0^T\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial y^2}\right]dy\\
&=2\,\mathrm{Re}\int_0^T\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial y}\right]dy=0.
\end{aligned}\right. \tag{2.18}$$

Der integralfreie Ausdruck verschwindet für $x<0$ wegen Bedingung 2., in $0<x<1$ wegen Bedingung 3.a) und in $x>1$ wegen Bedingung 3.b). Wir haben damit bewiesen

$$\int_0^T\left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2-\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2+k^2|\varphi|^2\right]dy=\begin{cases}c_- & \text{in } x<0\\ c_0 & \text{in } 0<x<1\\ c_+ & \text{in } x>1.\end{cases} \tag{2.19}$$

Für $|x|\to\infty$ strebt aber der Integrand gleichmäßig gegen Null, so daß $c_-=c_+=0$ sein müssen. $\varphi(x,y)$ verhält sich einschließlich seiner Ableitungen auf $x=1$, $0<y<T$ stetig und φ und grad φ bleiben dort wegen Bedingung 4.b) beschränkt, so daß sich die Integrale (2.19) für $x\to 1-0$ und $x\to 1+0$ stetig anschließen müssen, d.h. $c_0=c_+=0$ notwendig. Für $x=0$ können wir diesen

*) Man wähle zunächst $\int_{\eta}^{T-\eta}$ mit $0<\eta<T/2$ und lasse dann $\eta\to+0$ streben.

Schluß nicht benutzen, da für $\mu \geqq \frac{1}{2}$ nach Bedingung 4.a) der Integrand von (2.19) auf $x=0$ nicht mehr integrabel zu sein braucht. Die Bedingung 4.b) könnten wir abschwächen zu der Forderung quadratischer Integrabilität von grad φ auf $x=1$. Da φ und grad φ für $|x| \to \infty$ exponentiell abklingen, so können wir (2.19) von $-\infty$ bis $+\infty$ bezüglich x integrieren und erhalten

$$\iint_{\mathfrak{S}} \left[\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 - \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 + k^2 \cdot |\varphi|^2 \right] dx\, dy = 0. \tag{2.20}$$

Addieren wir diese Gleichung zu (2.17a), so resultiert

$$2 \cdot \iint_{\mathfrak{S}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 dx\, dy = 0, \tag{2.21}$$

was wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ in $\mathfrak{S}$ nur für $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ in $\mathfrak{S}$ möglich ist, d.h. $\varphi(x, y) = \Phi(y)$. Als Lösung der Schwingungsgleichung muß dann aber für Φ gelten:

$$\Phi(y) = a \cdot e^{iky} + b \cdot e^{-iky}. \tag{2.22}$$

Es muß aber $a=b=0$ sein, da sonst $\Phi(y)$ für $|x| \to \infty$ nicht exponentiell abklingt. Damit haben wir also $\varphi(x, y)=0$ gezeigt.

Entsprechende Sätze kann man auch beweisen für analoge zylindersymmetrische Gebiete, bei denen konzentrische Halbzylinder als Berandungen auftreten.

Literatur

[1] Sommerfeld, A.: Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Jahresb. d. dtsch. Math. Ver. **21**, 309 (1912).

[2] Magnus, W.: Über Eindeutigkeitsfragen bei einer Randwertaufgabe von $\Delta u + k^2 u = 0$. Jahresb. d. dtsch. Math. Ver. **52**, 177 (1942).

[3] — Fragen der Eindeutigkeit und des Verhaltens im Unendlichen für Lösungen von $\Delta u + k^2 \cdot u = 0$. Abhdl. d. math. Sem. Univ. Hamburg **16**, 77 (1949).

[4] Rellich, F.: Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda \cdot u = 0$ in unendlichen Gebieten. Jahresb. d. dtsch. Math. Ver. **53**, 57 (1943).

[5] Leis, R.: Über das Neumannsche Randwertproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung. Arch. Rational. Mech. Anal. **2**, 107 (1958).

[6] Jones, D. S.: The eigenvalues of $\Delta u + \lambda \cdot u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains. Proc. Cambridge Phil. Soc. **49**, 668 (1953).

[7] Miranker, W. L.: Uniqueness and representation theorems for solutions of $\Delta u + k^2 \cdot u = 0$ in infinite domains. J. Math. Mech. **6**, 847 (1957).

[8] Rellich, F.: Das Eigenwertproblem von $\Delta u + \lambda \cdot u = 0$ in Halbröhren. Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, Jan. 8th, 1948, S. 329. New York: Interscience Publishers.

[9] Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. 1, S. 261. Leipzig 1944.

Institut für Mathematik der Universität des Saarlandes

(Eingegangen am 6. März 1961)

Müller, D.
Math. Zeitschr. 77, 45—62 (1961)

Verbandsgruppen und Durchschnitte endlich vieler Bewertungsringe

Herrn Friedrich-Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von
Dietrich Müller

Vorwort

Die vorliegende Arbeit baut auf Gedanken von Krull [3] und Lorenzen [4] zur multiplikativen Idealtheorie auf. Der Krull-Ribenboimsche Unabhängigkeitssatz der allgemeinen Bewertungstheorie wird in die Theorie der Verbandsgruppen übertragen, indem statt Bewertungen eines Körpers, Bewertungen gewisser Verbandsgruppen[1]) betrachtet werden. Dabei ergibt sich ein konstruktiver Überblick über die Klasse der Verbandsgruppen mit endlich vielen minimalen isolierten Untergruppen. Es wird eine Übersicht über die Ideale einer solchen Gruppe gegeben und die Theorie ihrer isolierten Komponentenideale entwickelt. Sämtliche dabei gewonnenen Ergebnisse lassen sich mit Hilfe des Unabhängigkeitssatzes auf die Idealtheorie des Durchschnitts endlich vieler allgemeiner Bewertungsringe übertragen.

Abschnitt I bringt eine kurze Übersicht über die verwendeten Begriffe. In der Terminologie haben wir uns im wesentlichen an [4] angeschlossen.

In II wird der von W. Krull stammende Begriff des Schichtensystems $\mathfrak{W}$ einer Menge von totalgeordneten Gruppen dargestellt, und zwar in gegenüber [3] vereinfachtem Aufbau. $\mathfrak{W}$ besteht aus einer endlichen Menge totalgeordneter „Basisgruppen" $V_1, \ldots, V_n$ und aus gewissen kanonisch totalgeordneten Quotientengruppen der V_i, die jeweils gemeinsame Quotientengruppen mindestens zweier Basisgruppen sind. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ heißt „restgebunden bezüglich $\mathfrak{W}$", wenn stets α_i und α_k in gemeinsamen Quotientengruppen von V_i und V_k, die zu $\mathfrak{W}$ gehören, dasselbe Element repräsentieren. Die Menge der restgebundenen Elemente von $V_1 \times \cdots \times V_n$ bildet eine Verbandsgruppe V^* mit endlich vielen minimalen isolierten Untergruppen. Ihre Struktur wird ebenfalls in II untersucht.

W. Krull vermutete in [3], daß alle Verbandsgruppen V mit endlich vielen minimalen isolierten Untergruppen $E_1, \ldots, E_n$ als eine solche Gruppe V^* vorkommen, genauer, daß V kanonisch isomorph zu der größten restgebundenen Untergruppe V^* von $V/E_1 \times \cdots \times V/E_n$ wird, und zwar bezüglich eines in natürlicher Weise zu V gehörigen Schichtensystems. Die Richtigkeit dieser Vermutung wird in III bewiesen[2]).

[1]) Ordnungshomomorphismen auf totalgeordnete Gruppen. Terminologie nach P. Jaffard [1].

[2]) Frühere Beweise finden sich bereits in meiner Staatsexamensarbeit (März 1957) und meiner Dissertation [5]. Aus einer brieflichen Mitteilung geht hervor, daß P. Jaffard unabhängig davon Beweise dieser Vermutung gefunden hat.

In IV wird ein Überblick über die Ideale von V dadurch gewonnen, daß auf die Idealtheorie in $V/E_1, \ldots, V/E_n$ zurückgegriffen wird. Der Begriff des restgebundenen Elements $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V/E_1 \times \cdots \times V/E_n$ wird auf Systeme $(A_1, \ldots, A_n)$ übertragen, wobei A_i die Menge der Repräsentanten eines Ideals von V/E_i ist. Die Ideale A von V und die verträglichen Systeme $(A_1, \ldots, A_n)$ entsprechen sich umkehrbar eindeutig, wobei $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ist, und A_i die Menge der Repräsentanten des von A in V/E_i erzeugten Ideals darstellt. Daneben wird in diesem Abschnitt eine Theorie der isolierten Komponentenideale der Ideale von V entwickelt.

$\mathfrak{D}$ sei der Durchschnitt endlich vieler beliebiger Bewertungsringe $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ eines Körpers $\mathfrak{K}$. Die Hauptidealgruppe von $\mathfrak{D}$ heiße $\mathfrak{H}$. V_i sei die zu $\mathfrak{B}_i$ gehörende Wertgruppe. Dann ergibt sich wieder in natürlicher Weise zu $V_1 \times \cdots \times V_n$ ein Schichtensystem $\mathfrak{W}$, da die Wertgruppen V_i zu Bewertungen desselben Körpers $\mathfrak{K}$ gehören. Der Krull-Ribenboimsche Unabhängigkeitssatz vermittelt den kanonischen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{H}$ und V^*, der größten bezüglich $\mathfrak{W}$ restgebundenen Untergruppe von $V_1 \times \cdots \times V_n$. In Abschnitt V wird über die bisher bekannten Ergebnisse hinaus gezeigt, daß durch diesen Isomorphismus die Ideale von $\mathfrak{D}$ und die Ideale von V^* einander eindeutig umkehrbar zugeordnet werden, so daß sich sämtliche idealtheoretischen Sätze von V^* auf $\mathfrak{D}$ übertragen lassen und umgekehrt. Damit ist die Idealtheorie des Durchschnitts endlich vieler beliebiger Bewertungsringe abgeschlossen[3]).

I. Vorbemerkungen zur Theorie der Verbandsgruppen

Wir stellen in diesem Abschnitt die zum Folgenden notwendigen Definitionen und Sätze aus der Theorie der Verbandsgruppen zusammen. In der Terminologie haben wir uns dabei LORENZEN [4] angeschlossen.

Geordnete Mengen

Wir verstehen unter einer Ordnung in einer Menge $M = \{a, b, c, \ldots\}$ eine Relation $\leqq$ mit:

$$a \leqq a \quad \text{für alle} \quad a \in M$$

$$a \leqq b, \quad b \leqq c \Rightarrow a \leqq c$$

$$a \leqq b, \quad b \leqq a \Rightarrow a = b.$$

Falls für $a, b \in M$ stets $a \leqq b$ oder $b \leqq a$ gilt, sprechen wir von einer Totalordnung in M.

---

[3]) Die in Abschnitt II und III dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse finden sich inhaltlich bereits in meiner Dissertation [5]. Die Abschnitte IV und V sind zu [5] neu dazu gekommen. Andererseits werden in [5] auch Systeme unendlich vieler Bewertungen eines Körpers betrachtet.

Herrn Professor W. KRULL verdanke ich viele wertvolle Anregungen und Ratschläge zu der vorliegenden Arbeit.

Geordnete Gruppen

Obwohl wir in dieser Arbeit stets nur kommutative Gruppen betrachten werden, verwenden wir die multiplikative Schreibweise. Eine Gruppe G heißt geordnet, wenn ihre Elemente eine geordnete Menge bilden und

$$a \leqq b \Rightarrow x\,a \leqq x\,b \quad \text{für beliebige} \quad x \in G$$

gilt.

G heißt totalgeordnet, wenn die Ordnung ihrer Elemente eine Totalordnung ist.

In G gilt genau dann $a \leqq b$, wenn $a\,b^{-1} \leqq 1$ ist.

Die Elemente $a \in G$ mit $a \geqq 1$ bilden eine Unterhalbgruppe[4]) R von G.

Verbandsgruppen

Eine geordnete Gruppe V heißt Verbandsgruppe, wenn ihre Ordnung einen Verband bildet. In Verbandsgruppen gilt

$$a \wedge b = (a^{-1} \vee b^{-1})^{-1}, \qquad a \vee b = (a^{-1} \wedge b^{-1})^{-1},$$
$$x(a \wedge b) = x\,a \wedge x\,b, \qquad x(a \vee b) = x\,a \vee x\,b.$$

Ferner gelten die Distributivgesetze:

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) = (a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d)$$
$$(a \vee b) \wedge (c \vee d) = (a \wedge c) \vee (a \wedge d) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge d).$$

Prime vollständige Unterhalbgruppen

Eine Unterhalbgruppe S von R heißt vollständig, wenn für alle $a, b \in R$ gilt:

$$a \leqq b, \quad b \in S \Rightarrow a \in S.$$

Eine vollständige Unterhalbgruppe S von R heißt prim, wenn für alle $a, b \in R$ gilt:

$$a \notin S, \quad b \notin S \Rightarrow a \wedge b \notin S.$$

Falls die 1 selbst eine prime vollständige Unterhalbgruppe ist, ist V totalgeordnet. In jedem Fall gibt es minimale prime vollständige Unterhalbgruppen[5]).

Satz 1. *$S^1, \ldots, S^n$ seien endlich viele prime vollständige Unterhalbgruppen von R und $D = \bigcap_{i=1}^{n} S^i$. Dann gilt für jede prime vollständige Unterhalbgruppe S von R mit $S \supseteq D$ auch $S \supseteq S^i$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Beweis. Wenn die Behauptung falsch wäre, gäbe es für alle $i = 1, \ldots, n$ jeweils ein $a_i \in S^i$ mit $a_i \notin S$. Dann wäre zwar $a = a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in D$, aber $a \notin S$.

[4]) Unterhalbgruppen mögen stets die $1 \in G$ enthalten.

[5]) Ist S eine prime vollständige Unterhalbgruppe von R, so ist $R - S$ ein Filter in R. S ist genau dann minimal, wenn $R - S$ ein Ultrafilter von R ist. Man könnte also statt von minimalen primen vollständigen Unterhalbgruppen von R auch von Antiultrafiltern in R sprechen.

Zu jeder primen vollständigen Unterhalbgruppe S von R gehört die durch S erzeugte und dadurch eindeutig bestimmte Untergruppe E von V. Es ist $E=\{a_1 a_2^{-1} \mid a_1, a_2 \in S\}$. E heißt die durch S erzeugte isolierte Untergruppe[6]). Wir werden stets die durch $S\ldots$ erzeugte Gruppe mit $E\ldots$ bezeichnen. Die Beziehung zwischen S und E ist umkehrbar eindeutig, denn es gilt

SATZ 2. $S=E\cap R$.

BEWEIS. $S\subseteq E\cap R$ ist klar.

Es sei $c\in E\cap R$. Dann ist $e=a_1 a_2^{-1}$ mit $a_1, a_2\in S$, also $e\cdot a_2\in S$. Aus $1\leqq e\leqq e a_2$ folgt $e\in S$ und damit $S\supseteq E\cap R$.

Für jede prime vollständige Unterhalbgruppe S von R gilt

SATZ 3. *V/E ist in kanonischer Weise totalgeordnet*[7]). *Die (primen*[8])*) vollständigen Unterhalbgruppen $\bar{S}'$ von $R\cdot E/E$ und die primen vollständigen Unterhalbgruppen S' von R mit $S'\supseteq S$ entsprechen sich umkehrbar eindeutig, wobei die Beziehung $\bar{S}'=S'\cdot E/E$ gilt.*

Die Menge der primen vollständigen Unterhalbgruppen S' von R mit $S'\supseteq S$ ist gemäß der Relation $\subseteq$ totalgeordnet.

BEWEIS. Für den ersten Teil des Beweises können wir auf JAFFARD [*1*] oder LORENZEN [*4*] verweisen.

Ferner ist zunächst klar, daß mit S' auch $\bar{S}'=S'\cdot E/E$ prime vollständige Unterhalbgruppe ist. Aus $S'\supseteq S$ und der Vollständigkeit von S' folgt $S'\cdot E\cap R=S'$; d.h. $S'=\{s\in R\mid \bar{s}\in\bar{S}'\}$. Ist umgekehrt $\bar{S}'$ prime vollständige Unterhalbgruppe von $R\cdot E/E$, dann sei $S'=\{s\in R\mid \bar{s}\in\bar{S}'\}$. Es gilt $S'\supseteq S$, und man sieht, daß S' wieder prime vollständige Unterhalbgruppe ist. Außerdem gilt $S'\cdot E/E=\bar{S}'$.

Da die vollständigen Unterhalbgruppen einer totalgeordneten Gruppe stets gemäß $\subseteq$ totalgeordnet sind, folgt der letzte Teil des Satzes aus den vorhergehenden.

II. Schichtensysteme totalgeordneter Gruppen; direkte Produkte mit Restbindungen

Unter einem Schichtensystem $\mathfrak{W}$ totalgeordneter Gruppen verstehen wir ein Paar $(\mathfrak{M}, \Phi)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\mathfrak{M}=\{W_0^0; W_1^1, \ldots, W_{k_1}^1; \ldots; W_1^l, \ldots, W_{k_l}^l\}$$
$$\Phi=\{\varphi_1^1, \ldots, \varphi_{k_1}^1; \ldots; \varphi_1^l, \ldots, \varphi_{k_l}^l\}.$$

a) Die W_i^s sind totalgeordnete Gruppen.

b) W_0^0 ist die nur aus dem Einselement bestehende Gruppe.

c) Die k_i sind ganze Zahlen mit $k_i\geqq 1$ für $i=1, \ldots, l$.

d) φ_i^s ist *echter* Ordnungshomomorphismus von W_i^s auf ein $W_{i'}^{s-1}$.

---

[6]) Terminologie nach JAFFARD [*1*].

[7]) Das bedeutet: Für $\bar{a}\in V/E$ gilt genau dann $\bar{a}\geqq\bar{1}$, wenn es einen Repräsentanten a von $\bar{a}$ mit $a\geqq 1$ gibt.

[8]) Wegen der Totalordnung von V/E ist jede vollständige Unterhalbgruppe von $R\cdot E/E$ prim.

e) Falls für $s \geqq 2$ die Gruppe W_t^{s-1} Bild einer Gruppe $W_{t'}^s$ unter $\varphi_{t'}^s$ ist, dann gibt es auch eine Gruppe $W_{t''}^s$ mit $t'' \neq t'$ derart, daß W_t^{s-1} auch Bild von $W_{t''}^s$ unter $\varphi_{t''}^s$ ist.

Wir nennen die Menge der Gruppen $W_1^s, \ldots, W_{k_s}^s$ die s-te Schicht von $\mathfrak{W}$. Aus d) folgt, daß die Gruppen der ersten Schicht durch die zugehörigen Elemente von Φ sämtlich auf W_0^0 abgebildet werden.

Man beachte ferner, daß für $s \neq 0$ nicht verlangt wird, daß W_t^s als Bild einer Gruppe $W_{t'}^{s+1}$ unter dem Homomorphismus $\varphi_{t'}^{s+1}$ vorkommt. Es gibt also in $\mathfrak{W}$ im allgemeinen auch außerhalb der l-ten Schicht Gruppen, die nicht als Bildgruppen auftreten. Jede Gruppe von $\mathfrak{M}$, die nicht als Bildgruppe bezüglich Φ auftritt, nennen wir Basisgruppe von $\mathfrak{W}$.

In der Menge $\mathfrak{M}$ erklären wir nun eine Ordnungsrelation $\leqq$. Es sei $W_t^s < W_{n_m}^{s+m}$, wenn W_t^s Bild der Gruppe $W_{n_m}^{s+m}$ unter dem Homomorphismus $\varphi_{n_1}^{s+1} \ldots \varphi_{n_m}^{s+m}$ ist. Wir schreiben $W_t^s \leqq W_{t'}^{s'}$, wenn $W_t^s < W_{t'}^{s'}$ oder $W_t^s = W_{t'}^{s'}$ ist. Unmittelbar aus a) bis e) folgt dann

Lemma 1. *Zu jeder Gruppe $W_t^s \in \mathfrak{M}$ gibt es, falls $r \leqq s$ ist, in der r-ten Schicht genau eine Gruppe $W_{t'}^r$ mit $W_{t'}^r \leqq W_t^s$.*

Daraus folgt sofort

Lemma 2. *Die Menge $\{W_{t'}^r \in \mathfrak{M} \mid W_{t'}^r \leqq W_t^s\}$ ist gemäß $\leqq$ totalgeordnet.*

Wir zeigen nun

Satz 4. *$\mathfrak{M}$ bildet bezüglich $\leqq$ einen Halbverband.*

Beweis. Aus den gegebenen Definitionen folgt sofort

$$W_t^s \leqq W_t^s$$
$$W_t^s \leqq W_{t'}^{s'}, \quad W_{t'}^{s'} \leqq W_{t''}^{s''} \Rightarrow W_t^s \leqq W_{t''}^{s''}$$
$$W_t^s \leqq W_{t'}^{s'}, \quad W_{t'}^{s'} \leqq W_t^s \quad \Rightarrow W_t^s = W_{t'}^{s'}.$$

Aus der Tatsache, daß für jede Gruppe $W_t^s \in \mathfrak{M}$ stets $W_0^0 \leqq W_t^s$ ist, und aus Lemma 2 folgt, daß zu zwei Gruppen $W_t^s, W_{t'}^{s'}$ die Gruppe $W_t^s \wedge W_{t'}^{s'}$ (g.g.T. bezüglich der Ordnung $\leqq$) stets existiert und eindeutig bestimmt ist.

Abweichend von der bisherigen Bezeichnungsweise werden nun die Basisgruppen von $\mathfrak{W}$ mit $V_1, \ldots, V_n$ in irgendeiner Numerierung bezeichnet. Für $V_i \wedge V_k$ schreiben wir kurz V_{ik} (insbesondere für V_i auch V_{ii}).

Satz 5. *Für jede Gruppe $W_t^s \neq W_0^0$ gilt $W_t^s = V_{ik}$ bei passend gewählten i, k.*

Beweis. Falls W_t^s Basisgruppe ist, ist alles klar. Sonst gilt wegen der Eigenschaft e) von $\mathfrak{W}$: $W_t^s \leqq W_{t_1}^{s+1}$ und $W_t^s \leqq W_{t_2}^{s+1}$ für passend gewählte t_1, t_2. Falls $W_{t_1}^{s+1}$ nicht selbst Basisgruppe ist, gibt es ein $W_{\ldots}^{s+2}$ mit $W_{t_1}^{s+1} \leqq W_{\ldots}^{s+2}$ usw. Schließlich kommen wir zu einer Basisgruppe V_i. Entsprechend verfahren wir mit $W_{t_2}^{s+1}$ und kommen zu einer Basisgruppe V_k. Es ist klar, daß $W_t^s \leqq V_{ik}$ gilt (s. Lemma 2). Aus Lemma 1 und 2 folgt $V_{ik} < W_{t_1}^{s+1}$ und $V_{ik} < W_{t_2}^{s+1}$, also auch $V_{ik} \leqq W_t^s$.

Wir interessieren uns nunmehr für das geordnete direkte Produkt $V_1 \times \cdots \times V_n$. Für $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ gilt genau dann

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqq (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, wenn $\alpha_i \leqq \beta_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt. Den Homomorphismus $V_i \to V_{ik}$, der durch Hintereinanderausführen von Elementen aus Φ gewonnen wird, bezeichnen wir mit η_{ik}. Das Element $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ nennen wir bezüglich $\mathfrak{W}$ restgebunden, wenn für jedes Paar i, k jeweils $\eta_{ik}\alpha_i = \eta_{ki}\alpha_k$ ist. Es ist klar, daß die restgebundenen Elemente von $V_1 \times \cdots \times V_n$ eine Untergruppe V^* der Gruppe $V_1 \times \cdots \times V_n$ bilden. Wie kann man die Elemente von V^* konstruieren? Dazu formulieren wir

SATZ 6. A) *Das Element* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V^*$ *ordnet in eindeutiger Weise jeder Gruppe* $W_t^s \in \mathfrak{M}$ *ein* $\alpha_t^s \in W_t^s$ *derart zu, daß* a) $\alpha_t^s = \alpha_i$ *ist, falls* $W_t^s = V_i$, *also Basisgruppe ist,* b) $\alpha_t^s = \varphi_{t'}^{s,r+1}\alpha_{t'}^{s,r+1}$ *ist, falls* W_t^s *Bildgruppe des Homomorphismus* $\varphi_{t'}^{s+1}$ *ist.*

B) *Hat man umgekehrt aus jeder Gruppe* $W_t^s \in \mathfrak{M}$ *ein* $\alpha_t^s \in W_t^s$ *so ausgewählt, daß* b) $\alpha_t^s = \varphi_{t'}^{s,r+1}\alpha_{t'}^{s,r+1}$ *ist, falls* W_t^s *Bild von* $\varphi_{t'}^{s+1}$ *ist, und setzt man* a) $\alpha_i = \alpha_t^s$ *falls* $W_t^s = V_i$ *ist, dann ist* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V^*$.

BEWEIS. A) Falls W_t^s Basisgruppe ist, ist α_t^s durch a) eindeutig bestimmt. Falls $W_t^s = W_0^0$ ist, ist nur $\alpha_t^s = 1 \in W_0^0$ möglich. Falls $W_t^s \neq W_0^0$ und nicht Basisgruppe ist, gilt nach Satz 5 etwa $W_t^s = V_{ik}$ mit $i \neq k$. Wir setzen $\alpha_t^s = \eta_{ik}\alpha_i$. Das definiert α_t^s eindeutig. Wäre nämlich $V_{ik} = V_{jm}$, dann hätte man $V_{ik} \leqq V_j, V_m, V_i, V_k$, also auch $V_{ik} \leqq V_{ij}$ und $V_{ik} \leqq V_{im}$. Wegen Lemma 2 gilt $V_{ij} \leqq V_{im}$ oder $V_{im} \leqq V_{ij}$. In jedem Fall zeigt die Gleichung $V_{ik} = V_{jm}$, daß nicht gleichzeitig $V_{ik} < V_{ij}$ und $V_{ik} < V_{im}$ sein kann. Es gilt also etwa $V_{ik} = V_{ij}$. Dann gilt auch $\eta_{ik} = \eta_{ij}$ und $\eta_{ji} = \eta_{jm}$. Daraus folgt $\eta_{ik}\alpha_i = \eta_{ij}\alpha_i = \eta_{ji}\alpha_j = \eta_{jm}\alpha_j$. α_t^s ist also in eindeutiger Weise definiert.

Daraus, daß die η_{ik} durch Verwendung von Elementen aus Φ konstruiert wurden, folgt b).

B) Wegen b) und der Definition der η_{ik} gilt $\eta_{ik}\alpha_i = \eta_{ki}\alpha_k = \alpha_t^s$, falls $W_t^s = V_{ik}$ ist. Das bedeutet, daß $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ restgebunden ist.

Wir können nun ein Konstruktionsverfahren für die Elemente von V^* angeben:

Man gehe von W_0^0 aus und setze $\alpha_0^0 = 1$. Dann bestimme man $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{k_1}^1$ aus $W_1^1, \ldots, W_{k_1}^1$ beliebig. Trivialerweise gilt dann $\varphi_t^1 \alpha_t^1 = \alpha_0^0$ für $t = 1, \ldots, k_1$. Dann bestimme man α_t^2 für $t = 1, \ldots, k_2$ so, daß stets $\varphi_t^2 \alpha_t^2 = \alpha_{t'}^1$, gilt, falls $\varphi_t^2 \in \Phi$ die Abbildung $W_t^2 \to W_{t'}^1$, ist. Das ist immer möglich. Auf diese Weise wird schließlich jeder Gruppe W_t^s ein $\alpha_t^s \in W_t^s$ zugeordnet. Insbesondere sind den Basisgruppen $V_1, \ldots, V_n$ Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zugeordnet, von denen Satz 6 B) besagt, daß $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ restgebunden ist. Satz 6 A) sichert, daß man alle Elemente von V^* auf diese Weise erhält.

Wir untersuchen nun die Struktur von V^* und zeigen zunächst

SATZ 7. V^* *ist eine Verbandsgruppe.*

BEWEIS. Es seien $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V^*$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in V^*$. Es gilt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 \wedge \beta_1, \ldots, \alpha_n \wedge \beta_n)$, und wir haben zu zeigen, daß $(\alpha_1 \wedge \beta_1, \ldots, \alpha_n \wedge \beta_n) \in V^*$ ist.

Man ordne jeder Gruppe $W_i^s \in \mathfrak{M}$ ein Element α_i^s und ein Element β_i^s nach Satz 6 A) mit den Eigenschaften a) und b) zu. Das Elementsystem $\gamma_i^s = \alpha_i^s \wedge \beta_i^s$ erfüllt wieder die Eigenschaft b) von Satz 6, denn da die φ_i^s Ordnungshomomorphismen sind, gilt

$$\gamma_i^s = \alpha_i^s \wedge \beta_i^s = \varphi_{i'}^{s+1}(\alpha_{i'}^{s+1} \wedge \beta_{i'}^{s+1}) = \varphi_{i'}^{s+1}\gamma_{i'}^{s+1}.$$

Setzt man also $\gamma_i = \gamma_i^s$, falls $W_i^s = V_i$ ist, so erhält man das nach Satz 6 B) restgebundene Element $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = (\alpha_1 \wedge \beta_1, \ldots, \alpha_n \wedge \beta_n)$. Entsprechendes gilt für $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \vee (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Wir bezeichnen die Menge der Elemente $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V^*$ mit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geq (1, \ldots, 1)$ mit R^*.

Satz 8. *$S_i = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^*,\ \alpha_i = 1\}$ ist für jedes $i = 1, \ldots, n$ jeweils minimale prime vollständige Unterhalbgruppe von R^*. Die S_i sind die einzigen minimalen primen vollständigen Unterhalbgruppen von R^*.*

Beweis. Daß S_i eine Unterhalbgruppe von R^* ist, ist klar. Aus $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geqq (\beta_1, \ldots, \beta_n) \geqq (1, \ldots, 1)$ folgt mit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_i$ auch $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in S_i$. Aus $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \notin S_i$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \notin S_i$ folgt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 \wedge \beta_1, \ldots, \alpha_n \wedge \beta_n) \notin S_i$ wegen $\alpha_i \wedge \beta_i = \alpha_i \neq 1$ oder $\alpha_i \wedge \beta_i = \beta_i \neq 1$.

S_i ist auch minimal. Es sei S' eine echt in S_i enthaltene prime vollständige Unterhalbgruppe. Man wähle Elemente $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in R^*$ auf folgende Weise:

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_i$ aber $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \notin S'$, sonst beliebig.

$(\beta_1', \ldots, \beta_n') \in S'$ zunächst beliebig. Nach Satz 6 ist es ohne weiteres möglich, daraus ein ebenfalls restgebundenes Element $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ zu erhalten, indem man $\beta_k = \beta_k'$ für $k \neq i$ und $\beta_i > 1$ wählt, da — falls $V_i = W_{i'}^{s+1}$ ist — der Homomorphismus $\varphi_{i'}^{s+1}$ ein *echter* Ordnungshomomorphismus ist, also auch von 1 verschiedene Elemente auf die 1 von W_i^s abbildet. Man sieht dann, daß $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in S'$ ist. Doch es gilt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge (\beta_1, \ldots, \beta_n) \leqq (\beta_1', \ldots, \beta_n') \in S'$.

Gäbe es außer den Halbgruppen $S_1, \ldots, S_n$ noch eine weitere minimale prime vollständige Unterhalbgruppe $\tilde{S}$ von R^*, dann hätte man zu jedem $i = 1, \ldots, n$ ein $\alpha_i \in S_i$ mit $a_i \notin \tilde{S}$. Es würde $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n = (1, \ldots, 1)$ gelten, d.h. $\tilde{S}$ wäre gar nicht prim.

III. Verbandsgruppen mit endlich vielen minimalen primen vollständigen Unterhalbgruppen

V sei eine Verbandsgruppe, deren Unterhalbgruppe R der ganzen Elemente nur endlich viele minimale prime vollständige Unterhalbgruppen $S_1, \ldots, S_n$ besitzt. Unter V_i verstehen wir die (nach Satz 3 totalgeordnete) Gruppe V/E_i. Das von $a \in V$ repräsentierte Element von V_i nennen wir $\bar{a}_i$. Wir betrachten ferner das geordnete direkte Produkt $V_1 \times \cdots \times V_n$, dessen Ordnung dadurch definiert ist, daß $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqq (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ genau dann gilt, wenn $\alpha_i \leqq \beta_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ist. Für unsere weiteren Betrachtungen benötigen wir das folgende Resultat von Lorenzen [4], das wir ohne Beweis zitieren:

LEMMA 3. *Ist $\{S_\tau\}$ die Menge der minimalen primen vollständigen Unterhalbgruppen der ganzen Elemente einer (beliebigen) Verbandsgruppe V, dann ist $\bigcap_\tau S_\tau = 1$.*

KOROLLAR. $\bigcap_\tau E_\tau = 1$.

BEWEIS. Es sei $x \in \bigcap_\tau E_\tau$. Dann gilt für jedes τ eine Gleichung $x = a_\tau \cdot b_\tau^{-1}$ mit $a_\tau, b_\tau \in S_\tau$, und es ist $(1 \vee x)^{-1} = 1 \wedge a_\tau^{-1} b_\tau$. Da jeweils $a_\tau (1 \wedge a_\tau^{-1} b_\tau) = a_\tau \wedge b_\tau \in S_\tau$ ist, gilt $(1 \vee x)^{-1} \in E_\tau$ für alle τ. Nach Satz 2 folgt daraus $1 \vee x \in S_\tau$ für alle τ, nach Lemma 3 also $1 \vee x = 1$. Das bedeutet $x \leqq 1$, nach Satz 2 also $x^{-1} \in \bigcap_\tau S_\tau$ und nach erneuter Anwendung von Lemma 3 ergibt sich $x = 1$.

SATZ 9. *Die Abbildung $a \to (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$ vermittelt einen Ordnungsisomorphismus von V auf eine Untergruppe V^{**} des geordneten direkten Produkts $V_1 \times \cdots \times V_n$.*

BEWEIS. Die Menge der Bilder der Elemente $a \in V$ in $V_1 \times \cdots \times V_n$ nenne man V^{**}. Daß die Abbildung $V \to V^{**}$ einen Ordnungshomomorphismus darstellt, ist klar.

Aus dem Korollar zu Lemma 3 folgt zunächst die Umkehrbarkeit der Abbildung. Aus $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n)$ folgt $a = b$. Es liegt also ein Isomorphismus vor.

Gilt $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \geqq (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n)$, dann ist $\bar{a}_i \geqq \bar{b}_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Äquivalent damit ist die Aussage $\bar{a}_i \wedge \bar{b}_i = \overline{(a \wedge b)}_i = \bar{b}_i$, und erneute Anwendung des Korollars zu Lemma 3 ergibt $a \wedge b = b$, also ist $a \geqq b$, und Satz 9 ist bewiesen.

Wir konstruieren nun zu $V_1, \ldots, V_n$ in natürlicher Weise ein Schichtensystem $\mathfrak{W}$ derart, daß die V_i gerade zu den Basisgruppen von $\mathfrak{W}$ werden und wollen dann zeigen, daß die zu $\mathfrak{W}$ gehörige restgebundene Gruppe $V^* \subseteqq V_1 \times \cdots \times V_n$ identisch mit V^{**} ist.

LEMMA 4. *Zu zwei minimalen primen vollständigen Unterhalbgruppen S_i und S_k von V gibt es genau eine kleinste prime vollständige Unterhalbgruppe S_{ik} von R mit $S_{ik} \supseteqq S_i, S_k$.*

BEWEIS. Die Menge $N_i = \{S \mid S \supseteqq S_i$, S prime vollständige Unterhalbgruppe von $R\}$ ist nicht leer, da $R \in N_i$. Sie ist nach Satz 3 bezüglich $\subseteqq$ totalgeordnet. Entsprechend bilde man N_k und betrachte $N_{ik} = N_i \cap N_k$. Auch diese Menge ist bezüglich $\subseteqq$ totalgeordnet. Der mengentheoretische Durchschnitt der Elemente von N_{ik} ist die gesuchte prime vollständige Unterhalbgruppe S_{ik}.

Wir bezeichnen die Gruppe V/E_{ik} mit V_{ik} und bemerken, daß wir diese wegen $E_{ik} \supseteqq E_i, E_k$ sowohl als Quotientengruppe von V_i als auch als Quotientengruppe von V_k auffassen können und werden. Ebenso fassen wir V_{jm} genau dann als Quotientengruppe von V_{ik} auf, wenn $E_{jm} \supset E_{ik}$ ist. Wir bilden nun für jedes Paar i, k die Gruppe V_{ik}. (Wir setzen $V_{ii} = V_i$.) In die Menge dieser Gruppen nehmen wir eine Gruppe V_{ik} auch dann nur einmal auf, wenn etwa $V_{ik} = V_{jm}$ sein sollte. Die Gruppe V/V soll, falls sie nicht schon unter den Gruppen V_{ik} vorkommt, zur Menge der V_{ik} dazugenommen werden und wird in jedem Fall mit W_0^0 bezeichnet. V_{jm} wird unmittelbare Quotientengruppe von V_{ik} genannt, wenn $E_{jm} \supset E_{ik}$ ist und in der Menge der V_{rs} keine Quotientengruppe von V_{ik} mehr existiert, von der V_{jm} Quotientengruppe ist.

Das gewünschte Schichtensystem wird dann wie folgt gewonnen: Von W_0^0 ausgehend bezeichnen wir mit $W_1^1, \ldots, W_{k_1}^1$ die sämtlichen Gruppen der Menge $\mathfrak{M}$ der V_{ik}, von denen W_0^0 unmittelbare Quotientengruppe ist. φ_t^1 ist jeweils der natürliche Homomorphismus $W_t^1 \to W_0^0$. Für jede Gruppe W_t^1 bilden wir nun die Gesamtheit der Gruppen V_{ik}, von denen W_t^1 unmittelbare Quotientengruppe ist und gewinnen dadurch die Gruppen W_t^2. φ_t^2 ist wieder der natürliche Homomorphismus von W_t^2 auf ein W_t^1; usw.

Wir wollen zeigen, daß dieser Prozeß ein Schichtensystem $\mathfrak{W}$ definiert:

Da die Menge der Quotientengruppen von V_i totalgeordnet ist (gemäß: ... ist Quotientengruppe von ...), besitzt jede Gruppe V_{ik} höchstens eine und damit genau eine unmittelbare Quotientengruppe. Die φ_t^s sind also eindeutig bestimmt.

Weil jede Gruppe V_{ik} entweder eine Quotientengruppe V_{jm} besitzt oder W_0^0 zur unmittelbaren Quotientengruppe hat, weil, falls V_{jm} Quotientengruppe von V_{ik} ist, niemals V_{ik} Quotientengruppe von V_{jm} ist, und weil es nur endlich viele V_{ik} gibt, kommt jede der Gruppen V_{ik} in dem oben beschriebenen Prozeß genau einmal vor.

Die Bedingungen a), b), c) verstehen sich für $\mathfrak{M}$ von selbst. d) ergibt sich aus der Konstruktion der V_{ik} und der Definition von φ_t^s. Um auch e) zu zeigen, nehmen wir an, daß V_{ik} die Gruppe V_{jm} als unmittelbare Quotientengruppe besitzt. Dann kann nicht V_{ik} gleichzeitig Quotientengruppe von V_j und V_m sein, da das der Definition von V_{jm} widersprechen würde. V_{ik} sei nicht Quotientengruppe von V_j. Wir bilden die Kette der Gruppen W_t^s, bei der wir von V_j jeweils zu ihrer unmittelbaren Quotientengruppe übergehen usw. In dieser Kette muß auch die Gruppe V_{jm} vorkommen. V_{ik} kann dagegen nicht vorkommen, und damit ist auch e) gezeigt.

Wir haben also ein Schichtensystem $\mathfrak{W}$ definiert, bei dem genau die V_i die Basisgruppen sind.

Satz 10. *Für die zu $\mathfrak{W}$ gehörige restgebundene Untergruppe V^* von $V_1 \times \cdots \times V_n$ gilt $V^* \geqq V^{**}$.*

Beweis. Da alle Gruppen von $\mathfrak{W}$ Quotientengruppen von V sind, ist klar, daß $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \in V^{**}$ stets restgebunden bezüglich $\mathfrak{W}$ ist.

Lemma 5. *Zu zwei primen vollständigen Unterhalbgruppen S' und S'' von R gibt es genau eine kleinste prime vollständige Unterhalbgruppe S von R mit $S \geqq S', S''$. Für diese gilt $S \cdot E'/E' = S'' \cdot E'/E'$.*

Beweis. Die Existenz von S zeigt man entsprechend dem Beweis von Lemma 4. Es gilt natürlich $S \cdot E'/E' \geqq S'' \cdot E'/E'$. Für den Rest genügt es — wegen der Gültigkeit von Satz 3 — zu zeigen, daß $S'' \cdot E'/E'$ eine prime vollständige Unterhalbgruppe von V/E' ist.

Es ist klar, daß $S'' \cdot E'/E'$ Halbgruppe ist. Hat man $\bar{1} \leqq \bar{a} \leqq \bar{b}$ und $\bar{b} \in S'' \cdot E'/E'$, so gibt es von $\bar{b}$ einen Repräsentanten $b \in S''$ und von $\bar{a}$ einen Repräsentanten $a \geqq 1$. Es gilt dann $1 \leqq a \wedge b \leqq b$, d.h. $a \wedge b \in S''$. Wegen der Totalordnung von V/E' ist $\bar{a} \wedge \bar{b} = \bar{a}$, d.h. $a \wedge b$ Repräsentant von $\bar{a}$, also

$\bar{a} \in S'' \cdot E'/E'$. Die Primeigenschaft von $S'' \cdot E'/E'$ ist wegen der Totalordnung von V/E' trivial.

LEMMA 6. *Bei gleicher Bezeichnung wie in Lemma 5 sei $\bar{a} \in E/E'$. Dann gibt es ein $x \in V$ so, daß $x \cdot E'/E' = \bar{a}$ und $x \cdot E''/E'' = \bar{1}$ ist.*

BEWEIS. Man kann ohne B. d. A. $\bar{a} \geqq \bar{1}$ annehmen. Dann ist klar, daß $\bar{a}$ nach Lemma 5 durch ein $x \in S''$ repräsentiert werden kann. Dieses erfüllt das Verlangte.

LEMMA 7. *Gegeben seien die primen vollständigen Unterhalbgruppen $S^1, \ldots, S^t$ von R und S^{rs} sei jeweils die zu dem Paar S^r, S^s gehörige kleinste beide umfassende prime vollständige Unterhalbgruppe von R.*

$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_t$ seien Elemente aus den $V/E^1, \ldots, V/E^t$ derart, daß für jedes $k \neq i$ stets $\bar{a}_i \in E^{ik}/E^i$ ist. Dann gibt es ein $x \in V$, so daß $x \cdot E^i/E^i = \bar{a}_i$ für $i = 1, \ldots, t$ ist.

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, daß es zu jedem i ein $x_i \in V$ gibt, so daß $x_i \cdot E^i/E^i = \bar{a}_i$ und $x_i \cdot E^k/E^k = \bar{1}$ für alle $k \neq i$ wird. Dann erfüllt $x = x_1 \ldots x_t$ die gewünschten Bedingungen.

Die Existenz des Elementes x_i weisen wir für $i = 1$ nach und benutzen dabei vollständige Induktion nach t. Es kann auch hier $\bar{a}_1 \geqq \bar{1}$ angenommen werden.

Nach Lemma 6 existiert ein Element $y \in V$ mit $y \cdot E^1/E^1 = \bar{a}_1$ und $y \cdot E^2/E^2 = \bar{1}$. Nach Induktionsannahme gibt es ein $z_1 \in V$ mit

$$z_1 \cdot E^1/E^1 = \bar{a}_1 \quad \text{und} \quad z_1 \cdot E^i/E^i = \bar{1} \quad \text{für} \quad i = 2, \ldots, t-1,$$

und ein $z_2 \in V$ mit

$$z_2 \cdot E^1/E^1 = \bar{a}_1 \quad \text{und} \quad z_2 \cdot E^k/E^k = \bar{1} \quad \text{für} \quad k = 3, \ldots, t.$$

Es sind nun drei Fälle möglich:

a) $z_1 \cdot E^t/E^t \geqq \bar{1}$ und $z_2 \cdot E^2/E^2 \geqq \bar{1}$. Dann wähle man $x_1 = z_1 \wedge z_2$.

b) $z_2 \cdot E^2/E^2 < \bar{1}$. Dann wähle man $x_1 = 1 \vee z_2$.

c) $z_1 \cdot E^t/E^t < \bar{1}$. Dann wähle man $x_1 = 1 \vee z_1$.

Es folgt nun der Hauptsatz dieses Abschnitts.

SATZ 11. *Es ist $V^* = V^{**}$.*

BEWEIS. Es sei $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V^*$. Wir ordnen gemäß Satz 6 A) jeder Gruppe $W_i^s \in \mathfrak{M}$ ein Element α_i^s eindeutig so zu, daß α_i Repräsentant von α_i^s ist, falls W_i^s Quotientengruppe von V_i ist. Wir suchen nun ein Element $a \in V$ derart, daß $\bar{a}_i = \alpha_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ wird. Dabei gehen wir schichtweise vor und bezeichnen mit S_i^s stets die prime vollständige Unterhalbgruppe von R, für die $W_i^s = V/E_i^s$ ist.

Nach Lemma 7 gibt es ein $x_1 \in V$, so daß $x_1 \cdot E_i^1/E_i^1 = \alpha_i^1$ für $i = 1, \ldots, k_1$ wobei $V/E_i^1 = W_i^1$ ist.

Nach $m-1$ Schritten haben wir bereits ein $x_{m-1} \in V$ gewonnen mit $x_{m-1} \cdot E_i^s/E_i^s = \alpha_i^s$ für $s \leqq m-1$. Man bilde nun die Elemente $\tilde{\alpha}_t^m = \alpha_t^m \cdot (x_{m-1}^{-1} \cdot E_t^m/E_t^m)$ für $t = 1, \ldots, k_m$. Dazu nehme man für alle Basisgruppen W_t^s mit $s < m$ das

Element $\tilde{\alpha}_{t'}^{s} = \bar{1}$ hinzu. Die Elemente $\tilde{\alpha}_{t}^{m}, \tilde{\alpha}_{t'}^{s}$ erfüllen dann zusammen die Voraussetzungen von Lemma 7, denn es gilt $\varphi_{t}^{m} \tilde{\alpha}_{t}^{m} = \bar{1}$. Es gibt also ein $x'_m \in V$ mit $x'_m \cdot E_t^m / E_t^m = \tilde{\alpha}_t^m$ und $x'_m \cdot E_{t'}^s / E_{t'}^s = \tilde{\alpha}_{t'}^s$.

Für das Element $x_m = x_{m-1} \cdot x'_m$ gilt dann $x_m \cdot E_{t''}^r / E_{t''}^r = \alpha_{t''}^r$ für alle $r \leqq m$.

Für maximales l ist in $a = x_l$ das gesuchte Element dann gefunden. Daraus folgt $V^{**} \subseteqq V^*$ und mit Satz 10 zusammen $V^{**} = V^*$.

IV. Zur Idealtheorie in Verbandsgruppen mit endlich vielen minimalen primen vollständigen Unterhalbgruppen

V sei Verbandsgruppe mit endlich vielen minimalen primen vollständigen Unterhalbgruppen $S_1, \ldots, S_n$ von R. Wir behalten die Bezeichnungen der vorigen Abschnitte bei, verstehen also unter $S_{\ldots}^{\ldots}$ stets eine prime vollständige Unterhalbgruppe von R und unter $E_{\ldots}^{\ldots}$ die von $S_{\ldots}^{\ldots}$ erzeugte Untergruppe. V sei das Schichtensystem $\mathfrak{V}$ totalgeordneter Gruppen im Sinne des vorigen Abschnitts zugeordnet, dessen Basisgruppen $V_1, \ldots, V_n$ sind, wobei $V_i = V/E_i$ mit $i = 1, \ldots, n$ ist. Mit $F_{\ldots}^{\ldots}$ bezeichnen wir stets die Menge $R \cdot E_{\ldots}^{\ldots}$. F ist also genau die Menge der Repräsentanten der Elemente von $R \cdot E/E$, d.h. die Menge der Repräsentanten der nichtnegativen Elemente von V/E[9]). Daraus folgt sofort:

Satz 12. *F besitzt folgende Eigenschaften*

a) $1 \in F$

b) $a, b \in F \quad \Rightarrow a \cdot b \in F$

c) $a, b \in F \quad \Rightarrow a \wedge b \in F$

d) $a, b \in F \quad \Rightarrow a \vee b \in F$

e) $a, b \notin F \quad \Rightarrow a \cdot b \notin F$

f) $a, b \notin F \quad \Rightarrow a \wedge b \notin F$

g) $a, b \notin F \quad \Rightarrow a \vee b \notin F$

h) $a \leqq b,\ a \in F \Rightarrow b \in F$

i) $a \notin F \quad \Rightarrow a^{-1} \in F$.

Satz 13. $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = R$.

Beweis. Es sei $a \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i$. Das bedeutet $\bar{a}_i \geqq \bar{1}$ für $i = 1, \ldots, n$, also $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \in R^*$, wobei R^* die Menge der ganzen Elemente von V^* ist. Nach Satz 11 gilt dann $a \in R$.

Satz 14. *K sei eine Untermenge von V, für die die Eigenschaften* a) bis i) *von Satz 12 gelten. Dann ist $K \supseteqq F_i$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Beweis. Aus a) und g) folgt bereits $K \supseteqq R$. Falls $K \not\supseteqq F_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt, gibt es zu jedem $i = 1, \ldots, n$ ein $a_i \in F_i$ mit $a_i \notin K$. Das bedeutet nach d) bzw. f): $a = a_1 \vee \ldots \vee a_n \in F_1 \cap \ldots \cap F_n = R$ aber $a \notin K$ mit Widerspruch zu $K \supseteqq R$.

[9]) Jaffard [1] nennt mit gutem Recht einen Ordnungshomomorphismus einer geordneten Gruppe auf eine totalgeordnete Gruppe eine „Bewertung". F ist die Menge der in der Bewertung $V \to V/E$ ganzen Elemente von V, — der „Bewertungsring".

SATZ 15. *Falls K die Eigenschaften* a) bis i) *von Satz* 12 *erfüllt, gilt $K=F$ für passend gewähltes S. Es ist $E=\{a \mid a\in F,\ a^{-1}\in F\}$.*

BEWEIS. Wir betrachten die Menge $M=\{a \mid a\in K,\ a^{-1}\in K,\ a\in R\}$. M ist eine prime vollständige Unterhalbgruppe von V, denn es gilt:

$1\in M$

$1\leqq a\leqq b, \quad b\in M \Rightarrow b^{-1}\in K, \quad a^{-1}\geqq b^{-1}\Rightarrow a^{-1}\in K\Rightarrow a\in M.$

$a,b\in R, \quad a,b\notin M\Rightarrow a^{-1},b^{-1}\notin K\Rightarrow (a^{-1}\vee b^{-1})=(a\wedge b)^{-1}\notin K\Rightarrow a\wedge b\notin M.$

Wir setzen $S=M$. Dann gilt $E\subseteqq K$ und damit auch $F\subseteqq K$. Falls $k\in K$ mit $k\notin F$ existierte, wäre $k^{-1}\in F$. Das würde $1\wedge k\in K$, $1\vee k^{-1}=(1\wedge k)^{-1}\in K$, also $1\vee k^{-1}\in S$, aber wegen $1\wedge k\leqq k\notin F$ jedoch $1\wedge k\notin F$ mit Widerspruch bedeuten.

Da F die Menge der Repräsentanten der Elemente von $R\cdot E/E$ ist, gilt $E=\{a \mid a\in F,\ a^{-1}\in F\}$.

Damit sind alle Untermengen von V mit den Eigenschaften des Satzes 12 bestimmt [10]). Wir definieren nun:

Eine Untermenge C von V heißt F-Ideal, wenn $C\cdot F\subseteqq C$ gilt. C heißt ganzes F-Ideal, wenn es F-Ideal ist und $C\subseteqq F$ gilt. Das F-Ideal C heißt prim, wenn es ganz ist und wenn aus $a, b\notin C$ und $a, b\in F$ stets $a\cdot b\notin C$ folgt.

Die Richtigkeit des folgenden Lemmas ist unmittelbar zu sehen:

LEMMA 8. *Falls M eine beliebige Untermenge von V ist, ist $M\cdot F$ das von M erzeugte F-Ideal.*

Eine Untermenge A von V heißt V-Ideal (oder einfach: Ideal von V), wenn $A\cdot R\subseteqq A$ gilt und aus $a, b\in A$ stets $a\wedge b\in A$ folgt [11]). Ein Ideal A von V heißt ganz, wenn $A\subseteqq R$ gilt. Ein Ideal A von V heißt prim, wenn es ganz ist und aus $a, b\in R$ und $a, b\notin A$ stets $a\cdot b\notin A$ folgt.

Unser Ziel ist es, eine Theorie der V-Ideale unter Heranziehung der F-Ideale zu gewinnen. Zunächst führen wir durch den folgenden Satz die Theorie der F-Ideale auf die Idealtheorie der totalgeordneten Gruppe V/E zurück.

SATZ 16. a) *Wenn C ein F-Ideal ist, ist $\overline{C}=C\cdot E/E$ Ideal von V/E.*

b) *Falls $\overline{C}$ ein Ideal von V/E ist, dann bildet die Menge der Repräsentanten der Elemente von $\overline{C}$ in V ein F-Ideal.*

c) *Bei der Zuordnung der F-Ideale von V und der Ideale von V/E nach a) und b) entsprechen sich insbesondere Primideale umkehrbar eindeutig.*

BEWEIS. a) Wegen $C\cdot F=C=R\cdot E\subseteqq C$ gilt auch $(C\cdot E/E)\cdot(R\cdot E/E)\subseteqq C\cdot E/E$.

b) Mit $\bar{c}\in\overline{C}$ und $\bar{r}\in R\cdot E/E$ gilt auch $\bar{c}\cdot\bar{r}\in\overline{C}$. Für Repräsentanten c bzw. $r\cdot e$, wobei $r\in R$ und $e\in E$ ist, ist $c\cdot r\cdot e$ Repräsentant eines Elementes von $\overline{C}$.

[10]) Der Beweis von Satz 15 zeigt, daß bereits ein Teil der Eigenschaften a) bis i) genügt, um F zu charakterisieren.

[11]) Die Menge der V-Ideale bildet ein totales Idealsystem im Sinne von JAFFARD [1].

c) $a, b \notin C \Rightarrow \bar{a}, \bar{b} \notin \bar{C} \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab} \notin \bar{C} \Rightarrow a \cdot b \in C$, falls $\bar{C}$ Primideal von V/E ist. $\bar{a}, \bar{b} \notin \bar{C} \Rightarrow a, b \notin C \Rightarrow a \cdot b \notin C \Rightarrow \overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b} \notin \bar{C}$, falls C primes F-Ideal ist.

Man hat dann unmittelbar die folgenden

KOROLLAR 1. *Falls C ein F-Ideal ist und $a, b \in C$ ist, dann ist auch $a \wedge b \in C$.*

KOROLLAR 2. *Die Menge der F-Ideale ist bezüglich $\subseteq$ totalgeordnet.*

Wegen der Totalordnung der F-Ideale existiert höchstens ein von F verschiedenes maximales ganzes F-Ideal.

LEMMA 9. *$P = F - E$ ist maximales ganzes F-Ideal. P ist prim.*

BEWEIS. Es sei $P = F - E$. Dann ist nach Satz 15 $P = \{x \mid x \in F,\ x^{-1} \notin F\}$. Für $x \in P$ und $y \in F$ ist $x \cdot y \in F$; $x^{-1} y^{-1} \notin F$, denn sonst wäre auch $x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot y = x^{-1} \in F$.

Die Maximalität von P ist klar.

Wegen $P = F - E$ ist P prim.

SATZ 17. a) *Falls P das in F maximale F-Primideal ist, dann ist $\tilde{P} = P \cap R$ ein Primideal von V. Es gilt $S = R - \tilde{P}$.*

b) *Falls $\tilde{P}$ Primideal von V ist, dann gibt es ein eindeutig bestimmtes F derart, daß $P = \tilde{P} \cdot F$ das maximale F-Primideal ist. Es gilt $P \cap R = \tilde{P}$.*

BEWEIS. a) Es ist $R \cdot \tilde{P} = R \cdot (R \cap P) \subseteq R$ und wegen $R \subseteq F$ auch $R \cdot \tilde{P} = R(R \cap P) \subseteq P$. Daher gilt $R \cdot \tilde{P} \subseteq \tilde{P}$.

Trivial ist wegen Korollar 1 zu Satz 16, daß aus $a, b \in \tilde{P}$ stest $a \wedge b \in \tilde{P}$ folgt. Die Primeigenschaft von $\tilde{P}$ folgt unmittelbar aus der Primeigenschaft von P.

Mit Hilfe von Lemma 9 folgt $R - \tilde{P} = (F - P) \cap R = S$.

b) Daß $\tilde{P}$ Primideal von V ist, bedeutet, daß $R - \tilde{P} = S$ prime vollständige Unterhalbgruppe von R ist. Nach Teil a) ist $P \cap R$ Primideal von V, wenn man mit P das maximale ganze F-Ideal bezeichnet. Aus $x \in \tilde{P}$ folgt $x \notin S$ also $x \in P$ und damit $\tilde{P} \subseteq P \cap R$. Aus $x \in P \cap R$ folgt $x^{-1} \notin F$ also $x \notin S$ und damit $x \in \tilde{P}$, also $P \cap R \subseteq \tilde{P}$. Es gilt also $\tilde{P} = P \cap R$. Trivialerweise ist dann $\tilde{P} \cdot F \subseteq P$. Ist $x \in P$, dann hat man wegen $x \in F$ eine Gleichung $x = r \cdot s_1 \cdot s_2^{-1}$ mit $r \in R$, $s_1, s_2 \in S$. Hier muß $r \cdot s_1 \notin E$ also $r \cdot s_1 \notin S$ und damit $r \cdot s_1 \in \tilde{P}$ gelten, so daß $P \subseteq \tilde{P} \cdot F$ ist.

Verträgliche Idealsysteme von F_i-Idealen und die Idealtheorie in V

Zunächst bemerken wir, daß zu F_i und F_k in eindeutiger Weise eine Menge F_{ik} durch die Gleichung $F_{ik} = R \cdot E_{ik}$ zugeordnet ist. F_{ik} ist die kleinste Menge F mit den Eigenschaften von Satz 12, für die $F \supseteq F_i$ und $F \supseteq F_k$ gilt.

Das F_i-Ideal A_i und das F_k-Ideal A_k heißen verträglich, wenn $A_i \cdot F_{ik} = A_k \cdot F_{ik}$ gilt. Ein System $\{A_1, \ldots, A_n\}$, wobei A_i jeweils A_i-Ideal ist, heißt verträglich, wenn für jedes Paar i, k die Ideale A_i und A_k verträglich sind.

LEMMA 10. *Repräsentieren $\alpha_i \in V_i$ und $\alpha_k \in V_k$ dasselbe Element von V_{ik}, dann lassen sich Elemente $\alpha_j \in V_j$ für $j \neq i, k$ so wählen, daß $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V^*$ ist.*

BEWEIS. Durch die gegebenen Elemente α_i und α_k sind für alle $W_i^s \geqq V_i$, V_k Elemente α_i^s im Sinne von Satz 6 sowohl zwangsläufig als auch eindeutig bestimmt. Durch geeignete Modifizierung des im Anschluß von Satz 6 beschriebenen Konstruktionsverfahrens für Elemente von V^* kommt man dann zu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V^*$.

LEMMA 11. *Jedes ganze V-Ideal A, das von R verschieden ist, ist in dem Ideal $R - S_i$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ enthalten.*

BEWEIS. Ist $A \nsubseteqq R - S_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, so gibt es zu jedem i ein $a_i \in A$ mit $a_i \in S_i$, d.h. $a = a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A$ und aus Lemma 3 folgt $a = 1$ mit Widerspruch zu $A \neq R$.

Es gilt nun folgender fundamentale Satz:

SATZ 18. a) *Ist $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ein verträgliches System von $F_1, \ldots, F_n$-Idealen, so ist $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A$ ein V-Ideal und es gilt $A_i = A \cdot F_i$.*

b) *Ist A ein V-Ideal, so ist $\{A_1, \ldots, A_n\}$ mit $A_i = A \cdot F_i$ ein verträgliches System von $F_1, \ldots, F_n$-Idealen und es gilt $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.*

BEWEIS. a) A ist ein Ideal von V. Ist nämlich $a, b \in A_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, dann gilt nach dem Korollar 1 zu Satz 16: $a \wedge b \in A$.

Wegen $A \subseteqq A_i$ gilt auch $A \cdot R \subseteqq A_i \cdot R \subseteqq A_i$, also $A \cdot R \subseteqq A$. Für festes i wähle man nun ein beliebiges Element $a_i \in A_i$. Für jedes $k \neq i$ muß es nach Voraussetzung der Verträglichkeit von $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ein $a_k \in A_k$ derart geben, daß a_i und a_k dasselbe Element von V_{ik} repräsentieren. $\bar{a}_i, \bar{a}_k$, die von a_i bzw. a_k in V_i bzw. V_k repräsentierten Elemente, lassen sich nach Lemma 10 zu einem restgebundenen Element von $V_1 \times \cdots \times V_n$ erweitern. Dieses nennen wir $\bar{a}_i^k$.

Man bilde nun $\bar{a}_i^1 \vee \ldots \vee \bar{a}_i^{i-1} \vee \bar{a}_i^{i+1} \vee \ldots \vee \bar{a}_i^n$. Auch dieses ist wieder restgebunden und bestimmt daher ein Element $a \in V$, das nach Konstruktion in V_i das Element a_i repräsentiert. Es gilt also $a_i = a \cdot e$ mit $e \in E_i$. Im übrigen repräsentiert das Element a in V_k ein Element $\bar{a}_k' \geqq \bar{a}_k$. Das bedeutet $a \in A_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Damit ist $A_i \in A \cdot F_i$ gezeigt. Die Gleichung $A \cdot F_i \subseteqq A_i$ gilt wegen $A \subseteqq A_i$ auch. Damit ist $A_i = A \cdot F_i$ gezeigt.

b) Aus $A \cdot F_{ik} = A \cdot F_i \cdot F_{ik} = A \cdot F_k \cdot F_{ik}$ folgt die Verträglichkeit von $\{A \cdot F_1, \ldots, A \cdot F_n\}$.

Es sei $A' = \bigcap_{i=1}^{n} A \cdot F_i$. Nach Teil a) dieses Satzes ist A' ein Ideal von V, und nach Konstruktion gilt $A' \subseteqq A$. Für beliebiges $a' \in A'$ ist $a' = a_i \cdot f_i$ mit $a_i \in A$ und $f_i \in F_i$. Man kann sogar wegen $F_i = R \cdot E_i$ annehmen, daß $f_i \in E_i$ ist, ja sogar $f_i^{-1} \in S_i$. Das bedeutet: Zu $a' \in A'$ gibt es zu jedem i ein $a_i \in A_i$ mit $\frac{a_i}{a'} \in S_i$. Die Menge $\left\{\frac{a_i}{a'} \mid a_i \in A\right\}$ bildet, wie man ohne weiteres nachprüft, ein Ideal von V. $\left\{\frac{a_i}{a'} \mid a_i \in A\right\} \cap R$ ist also ein ganzes Ideal von V. Die obigen Betrachtungen zeigen zusammen mit Lemma 11: $\left\{\frac{a_i}{a'} \mid a_i \in A\right\} \cap R = R$. Es gibt also ein $a \in A$ mit $\frac{a}{a'} = 1$, d.h. $a' \in A$, also $\bigcap_{i=1}^{n} A \cdot F_i = A$.

Isolierte Komponentenideale der V-Ideale

Es sollen die isolierten Komponentenideale A_T der Ideale A von V bezüglich der multiplikativ abgeschlossenen Mengen T von R bestimmt werden. Unter A_T verstehen wir das aus den Elementen der Menge $\{c \mid \exists_{x \in T} \cdot xc \in A\}$ bestehende Ideal.

Wir definieren folgende Äquivalenzrelation

$$T_1 \equiv T_2 \Leftrightarrow \underset{A \subseteq V}{\forall} \cdot A_{T_1} = A_{T_2}.$$

Eine besondere Rolle spielen unter den multiplikativ abgeschlossenen Untermengen von R Mengen der Gestalt $S^1 \cap \ldots \cap S^r$, wobei S^i eine prime vollständige Unterhalbgruppe von R ist, für die $S^i \supseteq S_i$ gilt. Falls wir auch $S^i = R$ zulassen, können wir für jede solche Menge $r = n$ annehmen.

Satz 19. *Zu jeder multiplikativ abgeschlossenen Untermenge T von R gibt es $S^1, \ldots, S^n$ mit $S^i \supseteq S_i$ so, daß $T \equiv S^1 \cap \ldots \cap S^n$ gilt.*

Beweis. Für jedes i bilde man folgende Menge von primen vollständigen Unterhalbgruppen von R: $\{S \mid S \supseteq T,\ S \supseteq S_i\}$. Da R zu dieser Menge gehört, ist sie nicht leer. Da sie totalgeordnet ist (s. Satz 3), enthält sie ein minimales Element S^i. Wir bilden nun $T' = S^1 \cap \ldots \cap S^n$. Es gilt $T' \supseteq T$ und deshalb für jedes Ideal A von V stets $A_{T'} \supseteq A_T$.

Wäre nicht $T = T'$, so würde es ein Ideal A geben, für das $A_T \subset A_{T'}$ wäre, d.h. es existierte ein $c \in A_{T'}$ mit $c \notin A_T$. Das bedeutet: $c \cdot x \in A$ für ein $x \notin T'$, jedoch für jedes $y \in T$ stets $c \cdot y \notin A$. In diesem Fall hat man $x^{-1} \cdot y \notin R$, ja sogar wegen Satz 13 $x^{-1} \cdot y \in F_i$ für mindestens ein i. Es muß sogar ein i geben, das von der speziellen Wahl von y nicht abhängt, für das also $x^{-1} \cdot y \notin F_i$ für alle $y \in T$ gilt.

Wäre das nämlich nicht der Fall, dann hätte man für jedes i ein $y_i \in T$ mit $x^{-1} \cdot y_i \in F_i$. Wegen $y_i \in R$ für alle $i = 1, \ldots, n$ würde für das Element $y = y_1 \ldots y_n \in T$ sogar $x^{-1} \cdot y \in F_i$ für alle i gelten und damit $x^{-1} \cdot y \in R$, also $c \cdot y \in A$.

Für das von der speziellen Wahl von y nicht abhängige i bilde man $P_i = \{z \in R \mid z \cdot x^{-1} \in F_i\}$. Man bestätigt mit Hilfe von Satz 12 leicht, daß P_i ein ganzes Primideal von V ist, für das wegen $y \cdot x^{-1} \in P_i$ auch $P_i \neq R$ gilt. $\tilde{S} = R - P_i$ ist also eine prime vollständige Unterhalbgruppe von R, für die $\tilde{S} \supseteq T$ gilt, also $\tilde{S} \supseteq S^k$ für ein gewisses k. Andererseits gilt aber $x \notin \tilde{S}$, jedoch $x \in S^k$ wegen $x \in T'$ mit Widerspruch.

Wir brauchen uns daher nur noch mit multiplikativ abgeschlossenen Systemen der Form $T = S^1 \cap \ldots \cap S^n$ zu befassen; bzw. wenn wir jetzt wieder auf „überflüssige" S^i verzichten, mit Systemen der Form $T = S^1 \cap \ldots \cap S^k$. Wir beweisen:

Satz 20. $A_{S^1 \cap \ldots \cap S^k} = A_{S^1} \cap \ldots \cap A_{S^k}$.

Beweis. Es ist sicher $A_{S^1 \cap \ldots \cap S^k} \subseteq A_{S^1} \cap \ldots \cap A_{S^k}$.

Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion nach k und nehmen an, daß er schon für Systeme $S^1 \cap \ldots \cap S^{k-1}$ bewiesen sei. O. B. d. A. können

wir $S^k \supsetneqq S^i$ für $i=1, \ldots, k-1$ annehmen. Es sei $\tilde{a} \in \tilde{A}$. Man beachte, daß $\tilde{A} \subseteq A_{S^1 \cap \ldots \cap S^{k-1}}$ gilt. Es gibt also ein $c_1 \in S^1 \cap \ldots \cap S^{k-1}$ mit $c_1 \cdot \tilde{a} \in A$. Ist $c_1 \in S^k$, dann ist auch $c_1 \in S^1 \cap \ldots \cap S^k$ und $\tilde{a} \in A_{S^1 \cap \ldots \cap S^k}$. Es sei $c_1 \notin S^k$. Da $\tilde{a} \in A_{S^k}$ ist, gibt es ein $c_2 \in S^k$ mit $\tilde{a} \cdot c_2 \in A$. Für $c = c_1 \wedge c_2$ hat man daher $c \in S^1 \cap \ldots \cap S^k$ und $\tilde{a} \cdot c \in A$ also $\tilde{a} \in A_{S^1 \cap \ldots \cap S^k}$, was $\tilde{A} \subseteq A_{S^1 \cap \ldots \cap S^k}$ bedeutet.

V. Zusammenhang mit der Bewertungstheorie

Gegeben sei ein Körper $\mathfrak{K}$, dessen Elemente wir mit $0, 1, a, b, c, \ldots$ bezeichnen, und die endlich vielen allgemeinen Bewertungen [12]) $B_1, \ldots, B_n$ von $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ seien die zugehörigen Bewertungsringe.

Wir nehmen an, daß die Bewertungen paarweise unvergleichbar seien, also stets $\mathfrak{B}_i \supsetneqq \mathfrak{B}_k$ für $i \neq k$ gilt.

Der Gegenstand unserer Untersuchungen ist die Idealtheorie des Ringes $\mathfrak{D} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{B}_i$. Die Gruppe der Hauptideale von $\mathfrak{D}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$.

Die zu $B_1, \ldots, B_n$ gehörigen Wertgruppen mögen $V_1, \ldots, V_n$ heißen. Zu $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B}_k$ gehört stets ein eindeutig bestimmter Bewertungsring $\mathfrak{B}_{ik}$, der kleinste die Ringe $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B}_k$ gleichzeitig umfassende Bewertungsring. Die zugehörige Bewertung B_{ik} heißt feinste gemeinsame Vergröberung von B_i und B_k. $V_{ik} = V_{ki}$ sei die zu B_{ik} gehörende Wertgruppe und ist Bild eines — im Falle $i \neq k$ echten — Ordnungshomomorphismus sowohl von V_i als auch von V_k. Setzen wir zusätzlich $V_{ii} = V_i$ und nehmen die Gruppe $\{1\}$ zu der Menge $\{V_{ik}\}$ hinzu, falls sie nicht schon unter den V_{ik} vorkommt, dann erhalten wir ein Schichtensystem $\mathfrak{W}$ wie in Abschnitt II, das aus den Gruppen V_{ik} besteht und dessen Basisgruppen die $V_1, \ldots, V_n$ sind. Die bezüglich $\mathfrak{W}$ größte restgebundene Untergruppe von $V_1 \times \cdots \times V_n$ nennen wir V. Es gilt der fundamentale von RIBENBOIM [6] zuerst in voller Allgemeinheit bewiesene Unabhängigkeitssatz der Allgemeinen Bewertungstheorie:

SATZ 21. *Falls* $(a) \in \mathfrak{H}$ *ist, dann ist* $\langle B_1(a), \ldots, B_n(a) \rangle \in V$. *Ist* $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \in V$, *dann gibt es ein* $a \in \mathfrak{K}$ *mit* $B_i(a) = \alpha_i$ *für* $i = 1, \ldots, n$.

Die Zuordnung $(a) \leftrightarrow \langle B_1(a), \ldots, B_n(a) \rangle$ *definiert einen Ordnungsisomorphismus zwischen* $\mathfrak{H}$ *und* V.

Ohne weiteres ergibt sich daraus das folgende

KOROLLAR. *Die Abbildung* $a \to (a) \leftrightarrow \langle B_1(a), \ldots, B_n(a) \rangle$ *ordnet den Elementen von* $\mathfrak{D}$ *genau die Elemente von* R, *die ganzen Elemente von* V, *zu.*

LEMMA 12. *Für jedes* $i = 1, \ldots, n$ *existiert in* V *ein Element* $(1, \ldots, 1, \alpha_i, 1, \ldots, 1)$ *mit* $\alpha_i > 1$.

BEWEIS. Wenn $\alpha_i > 1$ so gewählt wird, daß α_i aus dem Kern des zu V_i in $\mathfrak{W}$ gehörenden Homomorphismus stammt, so ist $(1, \ldots, 1, \alpha_i, 1, \ldots, 1)$ restgebunden. Da dieser Homomorphismus echt ist, besteht der Kern nicht nur aus der 1.

LEMMA 13. *Jedes endlich erzeugbare* $\mathfrak{D}$*-Ideal ist Hauptideal.*

[12]) Siehe KRULL [2].

Beweis. Es genügt, die Behauptung für zweifach erzeugte Ideale (a, b) zu beweisen. Wegen Lemma 12 und Satz 21 gibt es zu jedem $i=1, \ldots, n$ ein $d_i \in \mathfrak{D}$ mit $B_i(d_i) > 1$ und $B_n(d_i) = 1$ für $k \neq i$. Durch Multiplikation einer geeigneten Auswahl unter den Elementen $d_1, \ldots, d_n$ läßt sich ein $d \in \mathfrak{D}$ bilden, für das $B_i(d) > 1$ gilt, falls $B_i(a) = B_i(b)$ ist, und $B_i(d) = 1$, falls $B_i(a) \neq B_i(b)$ ist.

Man hat dann $B_i(a + d \cdot b) = \min\left(B_i(a), B_i(b)\right)$ für $i = 1, \ldots, n$ und damit ist $(a + db) = (a, b)$.

Wir kommen nun zum Hauptsatz dieses Abschnitts:

Satz 22. a) *Wenn A ein Ideal von V ist, dann bildet die Menge* $\mathfrak{a} = \{a \in \mathfrak{R} \mid \langle B_1(a), \ldots, B_n(a)\rangle \in A\}$ *ein $\mathfrak{D}$-Ideal in $\mathfrak{R}$.*

b) *Wenn $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{D}$-Ideal in $\mathfrak{R}$ ist, dann bildet die Menge* $A = \{\langle B_1(a), \ldots, B_n(a)\rangle \in V \mid a \in \mathfrak{a}\}$ *ein Ideal von V.*

c) *Die Zuordnung zwischen $\mathfrak{a}$ und A ist umkehrbar eindeutig.*

Beweis. a) Ist $a \in \mathfrak{a}$ und $d \in \mathfrak{D}$, dann ist $\langle B_1(d), \ldots, B_n(d)\rangle \in R$ und daraus folgt $a \cdot d \in \mathfrak{a}$.

Es sei $a, b \in \mathfrak{a}$. Dann ist mit $\langle B_1(a), \ldots, B_n(a)\rangle \in A$ und $\langle B_1(b), \ldots, B_n(b)\rangle \in A$ auch $\langle B_1(a) \wedge B_1(b), \ldots, B_n(a) \wedge B_n(b)\rangle \in A$. Es gibt nach Satz 21 ein $c \in \mathfrak{R}$ mit $B_i(c) = B_i(a) \wedge B_i(b)$ für $i = 1, \ldots, n$. Für dieses gilt $c \in \mathfrak{a}$, und man hat $\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \in \mathfrak{D}$. Damit ist auch $\frac{a-b}{c} \in \mathfrak{D}$ und $a - b \in \mathfrak{a}$.

b) Wenn $\langle \delta_1, \ldots, \delta_n\rangle \in R$ ist, dann gibt es nach Satz 21 ein $d \in \mathfrak{D}$ mit $B_i(d) = \delta_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Es gilt dann

$$\langle B_1(d), \ldots, B_n(d)\rangle \cdot \langle B_1(a), \ldots, B_n(a)\rangle = \langle B_1(a \cdot d), \ldots, B_n(a \cdot d)\rangle \in A.$$

Damit ist $A \cdot R \subseteq A$ gezeigt.

Es sei $\langle B_1(a), \ldots, B_n(a)\rangle \in A$ und $\langle B_1(b), \ldots, B_n(b)\rangle \in A$. Dann gibt es nach Lemma 13 ein $c \in \mathfrak{R}$ so, daß $(a, b) = (c)$. Das bedeutet

$$\langle B_1(a) \wedge B_1(b), \ldots, B_n(a) \wedge B_n(b)\rangle = \langle B_1(c), \ldots, B_n(c)\rangle.$$

Wegen $c \in \mathfrak{a}$ folgt damit auch $\langle B_1(a), \ldots, B_n(a)\rangle \wedge \langle B_1(b), \ldots, B_n(b)\rangle \in A$.

c) Unmittelbar aus den Definitionen sieht man, daß die Zuordnung $A \to \mathfrak{a}$ nach Teil a) und $\mathfrak{a} \to A'$ nach Teil b) des Satzes $A = A'$ ergibt. Ebenso zeigt sich, daß bei $\mathfrak{a} \to A$ nach Teil b) und $A \to \mathfrak{a}'$ nach Teil a) stets $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ wird.

Unmittelbar klar ist das folgende

Korollar. *Bei der durch Satz 22 vermittelten Zuordnung gehen ganze Ideale in ganze Ideale, Primideale in Primideale über.*

Der Wert von Satz 22 liegt darin, daß es nun möglich ist, alle Fragen der Idealtheorie von $\mathfrak{D}$ dadurch zu beantworten, daß man zunächst zu entsprechenden Fragen in V übergeht, diese — etwa mit Hilfe von Abschnitt IV — innerhalb von V behandelt und dann wieder in den ursprünglichen Bereich abbildet.

Literatur

[1] Jaffard, P.: Les systèmes d'idéaux. Travaux et recherches mathématiques Dunod. Paris 1960.

[2] Krull, W.: Allgemeine Bewertungstheorie. J. reine angew. Math. **167**, 160—196 (1931).

[3] — Zur Theorie der Bewertungen mit nichtarchimedisch geordneter Wertgruppe und der nichtarchimedisch geordneten Körper. CBRM, Colloque d'Algèbre Supérieure. Bruxelles 1956.

[4] Lorenzen, P.: Über halbgeordnete Gruppen. Math. Z. **52**, 483—526 (1949—50).

[5] Müller, D.: Verbandsgruppen und Durchschnitte allgemeiner Bewertungsringe. Inaug.-Dissertation der Math.-Naturw. Fakultät der Universität Bonn 1960.

[6] Ribenboim, P.: Le théorème d'approximation pour les valuations de Krull. Math. Z. **68**, 1—18 (1957—58).

Bonn, Endenicher Allee 2

(Eingegangen am 2. Februar 1961)

Breuer, M.
Math. Zeitschr. 77, 63–67 (1961)

Zum Pfaffschen Problem

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von
Manfred Breuer

Einleitung

In [1] habe ich einen „Hauptsatz der Charakteristikentheorie von Differentialformen" bewiesen, mit dessen Hilfe das Problem der Konstruktion von Integralmannigfaltigkeiten einer *ausgearteten* Differentialform auf das entsprechende Problem einer *nichtausgearteten* Differentialform zurückgeführt werden konnte. In ähnlicher Weise kann das Pfaffsche Problem einer Pfaffschen Form mit *ausgearteter* Cartanscher Ableitung vermöge dieses Hauptsatzes auf das entsprechende Problem für Pfaffsche Formen mit *nichtausgearteter* Cartanscher Ableitung reduziert werden. Man erhält auf diese Weise eine von den zahlreichen aus der Literatur bekannten Lösungsmethoden abweichende Lösungsmethode des Pfaffschen Problems, die in dieser Arbeit dargestellt wird und etwa folgendermaßen aussieht:

Zunächst wird das Pfaffsche Problem für Pfaffsche Formen ω mit *nichtausgearteter* Cartanscher Ableitung $d\omega$ gelöst. Hierzu benötigt man nur die Theorie der bezüglich $d\omega$ *kanonischen Koordinatensysteme* und einfache Mittel der *linearen Algebra*.

Danach wird das Pfaffsche Problem für Pfaffsche Formen mit *ausgearteter* Cartanscher Ableitung reduziert. Hierzu sei ω die zu untersuchende Pfaffsche Form auf einer hinreichend kleinen Umgebung U einer N-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit; die Cartansche Ableitung $d\omega$ von ω habe den überall konstanten Rang $2m < N$. Mit Hilfe des in [1] bewiesenen Hauptsatzes kann eine $2m$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit $\bar{U}$, eine Projektion $\pi: U \to \bar{U}$ und eine Pfaffsche Form $\bar{\omega}$ auf $\bar{U}$ angegeben werden, so daß gilt:

1. $\bar{\omega}$ hat eine *nichtausgeartete* Cartansche Ableitung $d\bar{\omega}$.
2. $\omega - \pi^* \bar{\omega}$ ist *exakt*.

Dabei ist π^* die π in natürlicher Weise zugeordnete Abbildung, die jeder Differentialform auf $\bar{U}$ eine Differentialform auf U zuordnet. Wegen 1. kann das Pfaffsche Problem für $\bar{\omega}$ mit Hilfe der bezüglich $d\omega$ kanonischen Koordinatensysteme gelöst werden. Aus dem Verhalten der Lösungen für $\bar{\omega}$ bei der Abbildung π^* erhält man zunächst die Lösungen des Pfaffschen Problems für $\pi^* \bar{\omega}$ und dann, auf Grund von 2., die Lösungen des Pfaffschen Problems für ω.

Zusammenfassend kann man sagen, daß vermöge des Hauptsatzes von [*1*] die *lokale Theorie des Pfaffschen Problems* für Differentialformen 1. Grades mit Cartanscher Ableitung von überall konstantem Rang vollständig auf die Theorie der *kanonischen Koordinatensysteme* zurückgeführt werden kann.

§ 1. Der Hauptsatz der Charakteristikentheorie

Sei α eine Differentialform r-ten Grades auf der N-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{V}^N$. Der *charakteristische Vektorraum Zentr* α_p von α im Punkte $p \in \mathfrak{V}^N$ ist der Vektorraum aller Tangentiale X_p von $\mathfrak{V}^N$ in p, für die gilt: Sind $X_p^1, \ldots, X_p^{r-1}$ Tangentiale von $\mathfrak{V}^N$ in p, so ist

$$\alpha_p(X_p, X_p^1, \ldots, X_p^{r-1}) = 0. \tag{1.1}$$

Die Abbildung *Zentr* α, die jedem $p \in \mathfrak{V}^N$ den Vektorraum *Zentr* α_p zuordnet, heißt das *charakteristische Vektorraumfeld* von α. Wir sagen, α habe einen konstanten *Rang* (etwa M), wenn für alle $p \in \mathfrak{V}^N$ *Zentr* α_p die gleiche Dimension (nämlich $N-M$) hat. Insbesondere heißt α *nichtausgeartet*, wenn α den konstanten Rang N hat. Im folgenden habe α stets den konstanten Rang M. — Aus [*1*], §2, Satz 1 folgt leicht:

SATZ 1. *Gilt für alle* $p \in \mathfrak{V}^N$

$$Zentr\,\alpha_p \subseteqq Zentr\,(d\alpha_p), \tag{1.2}$$

wobei $d\alpha$ *die Cartansche Ableitung von* α *ist, so ist Zentr* α *integrabel.*

Ist *Zentr* α integrabel, so heißt die zugehörige geblätterte Struktur die *charakteristische geblätterte Struktur* und ihre Blätter die *Charakteristiken* von α. Jetzt werde angenommen, daß *Zentr* α integrabel ist und daß die Menge $\overline{\mathfrak{V}}$ aller Charakteristiken von α so zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{V}}^M$ gemacht werden kann, daß gilt:

1. Die Topologie von $\overline{\mathfrak{V}}^M$ ist die Quotiententopologie von $\overline{\mathfrak{V}}$ bezüglich $\mathfrak{V}^N$.

2. Die kanonische Abbildung $\pi: \mathfrak{V}^N \to \overline{\mathfrak{V}}^M$ ist differenzierbar und von maximalem Rang.

$\overline{\mathfrak{V}}^M$ heißt die *charakteristische Quotientenmannigfaltigkeit* von $\mathfrak{V}^N$.

Der in [*1*] S. 144ff. bewiesene Hauptsatz der Charakteristikentheorie lautet

SATZ 2. *Auf* $\overline{\mathfrak{V}}^M$ *existiert dann und nur dann eine Differentialform* $\bar{\alpha}$ *vom Range* M *mit*

$$\alpha = \pi^* \bar{\alpha}, \tag{1.3}$$

wenn (1.2) *gilt. Existiert ein solches* $\bar{\alpha}$, *so ist dieses eindeutig bestimmt.*

Für die Anwendung auf das Pfaffsche Problem benötigen wir noch die folgenden beiden Corollare:

COROLLAR 1. Ist $d\alpha = 0$, so ist $d\bar{\alpha} = 0$.

Dieses Corollar ist eine einfache Folge aus der Tatsache, daß der Rang von $\bar{\alpha}$ maximal ist.

COROLLAR 2. *Gibt es ein* ω *und ein* $\overline{\omega}$ *mit* $\alpha = d\omega$ *und* $\bar{\alpha} = d\overline{\omega}$, *so ist* $d(\omega - \pi^* \overline{\omega}) = 0$.

BEWEIS. $d(\omega - \pi^* \overline{\omega}) = d\omega - d\pi^* \overline{\omega} = d\omega - \pi^* d\overline{\omega} = \alpha - \pi^* \bar{\alpha} = 0$.

§ 2. Lösung des Pfaffschen Problems für Pfaffsche Formen mit nichtausgearteter Cartanscher Ableitung

Das Pfaffsche Problem lautet (vgl. CARATHÉODORY [2], S. 121ff.): Ist ω eine Differentialform auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^N$, und ist $p \in \mathfrak{M}^N$, so ist eine Umgebung U von p und eine Darstellung von ω in U von der Gestalt

$$\omega|_U = d\Omega + y_1 dx_1 + \cdots + y_m dx_m \tag{2.1}$$

gesucht, wobei Ω, $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$ differenzierbare reellwertige Funktionen und die Zahl m so klein wie möglich sein soll. Ist m minimal, so heißt m der *Index* von ω in einer Umgebung von p. Die Zahl $2m$ bzw. $2m+1$ heißt die *Klasse* von ω, je nachdem ob die Darstellung (2.1) so gewählt werden kann, daß $d\Omega = 0$ ist oder nicht.

Der folgende Satz gibt eine Lösung dieses Problems für Pfaffsche Formen mit nichtausgearteter Cartanscher Ableitung:

SATZ 3. *Ist der Rang der Cartanschen Ableitung $d\omega$ der Pfaffschen Form ω auf der differenzierbaren $2m$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2m}$ überall gleich $2m$, so ist die Klasse von ω überall gleich $2m$.*

Zum Beweis benötigen wir zwei Sätze über kanonische Koordinatensysteme:

SATZ 4. *Ist α eine Differentialform 2. Grades vom Range $2m$ auf $\mathfrak{M}^{2m}$, und ist $d\alpha = 0$, so gibt es zu jedem $p \in \mathfrak{M}^{2m}$ eine Umgebung U und ein Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ auf U mit*

$$\alpha|_U = dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_m \wedge dy_m. \tag{2.2}$$

Ein Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$, für das (2.2) gilt, heißt kanonisch bezüglich α. Satz 4 besagt also, daß für geschlossene nichtausgeartete Differentialformen 2. Grades stets kanonische Koordinatensysteme existieren. Der Beweis ist bei CARATHÉODORY [2], S. 143ff. zu finden.

SATZ 5. *Ist $x_1', \ldots, x_m', y_1', \ldots, y_m'$ ein kanonisches Koordinatensystem in einer Umgebung des Punktes $p \in \mathfrak{M}^{2m}$, und ist Ω eine differenzierbare Funktion in einer Umgebung von p, so existiert ein kanonisches Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ in einer Umgebung von p mit*

$$y_1 dx_1 + \cdots + y_m dx_m = y_1' dx_1' + \cdots + y_m' dx_m' + d\Omega. \tag{2.3}$$

BEWEIS. Siehe CARATHÉODORY [2], S. 97!

Mit Hilfe der Sätze 4 bis 5 kann Satz 3 leicht bewiesen werden: Zunächst sei nach Satz 4 $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ ein kanonisches Koordinatensystem in einer Umgebung von p bezüglich $d\omega$. Dann ist $\omega - y_1 dx_1 - \cdots - y_m dx_m$ in einer Umgebung von p exakt. Nach Satz 5 kann man sich das Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ so gewählt denken, daß

$$\omega = y_1 dx_1 + \cdots + y_m dx_m \tag{2.4}$$

ist. Angenommen, die Klasse von ω sei $2m'$ oder $2m'+1$ mit $m'<m$. Dann gibt es eine Darstellung von ω von der Gestalt

$$\omega = d\psi + g_1\, df_1 + \cdots + g_{m'}\, df_{m'}.$$

Da m' der Index von ω ist, sind die Funktionen $f_1, \ldots, f_{m'}$ funktional unabhängig. In jeder Umgebung von p existiert daher ein q mit der Eigenschaft, daß

$$\mathfrak{W}_q^{2m-m'} = \{q' \mid f_1 q' = f_1 q, \ldots, f_{m'} q' = f_{m'} q\}$$

in einer Umgebung von q zu einer differenzierbaren $(2m-m')$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathfrak{V}^{2m}$ gemacht werden kann. Ist $\iota: \mathfrak{W}_q^{2m-m'} \to \mathfrak{V}^{2m}$ die Injektion einer dieser Untermannigfaltigkeiten in $\mathfrak{V}^{2m}$, so ist $\iota^*\alpha = \iota^* d\omega = d(\iota^*\omega) = d0 = 0$. $\mathfrak{W}_q^{2m-m'}$ ist also eine Integralmannigfaltigkeit von α. Nun ist aber die Dimension einer Integralmannigfaltigkeit einer Differentialform 2. Grades von maximalem Rang auf einer $2m$-dimensionalen Mannigfaltigkeit höchstens gleich m [1]). Also ist $2m-m' \leqq m$ und folglich $m \leqq m'$, was der obigen Annahme $m'<m$ widerspricht.

§ 3. Lösung des Pfaffschen Problems für Pfaffsche Formen mit ausgearteter Cartanscher Ableitung

Um das Pfaffsche Problem allgemein zu lösen, benötigen wir noch zwei Sätze, die angeben, wie sich die Klassen Pfaffscher Formen bei differenzierbaren Abbildungen verhalten.

SATZ 6. *Ist $\varphi: \mathfrak{V}^N \to \mathfrak{W}^M$ eine differenzierbare Abbildung der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{V}^N$ in die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{W}^M$, und ist η eine Pfaffsche Form auf $\mathfrak{W}^M$, so ist die Klasse von $\varphi^*\eta$ im Punkte $p \in \mathfrak{V}^N$ höchstens gleich der Klasse von η im Punkte $\varphi p \in \mathfrak{W}^M$.*

Der Beweis ist trivial: Ist $\eta = d\Omega + g_1\, df_1 + \cdots + g_m\, df_m$, so ist $\varphi^*\eta = d(\Omega \circ \varphi) + (g_1 \circ \varphi)\, d(f_1 \circ \varphi) + \cdots + (g_m \circ \varphi)\, d(f_m \circ \varphi)$, woraus die Behauptung folgt.

Zweimalige Anwendung von Satz 6 liefert den

SATZ 7. *Gibt es unter den Voraussetzungen von Satz 6 überdies noch einen differenzierbaren Schnitt von $\mathfrak{W}^M$ durch den Punkt $p \in \mathfrak{V}^N$, d.h. eine differenzierbare Abbildung $\psi: \mathfrak{W}^M \to \mathfrak{V}^N$, so daß $p \in \psi(\mathfrak{W}^M)$ und $\varphi \circ \psi$ die identische Abbildung von $\mathfrak{W}^M$ ist, so ist die Klasse von η im Punkte φp gleich der Klasse von $\varphi^*\eta$ im Punkte p.*

Sei jetzt ω eine Pfaffsche Form auf $\mathfrak{V}^N$, von der wir eine Kurzdarstellung und die Klasse in einer Umgebung des Punktes $p \in \mathfrak{V}^N$ bestimmen wollen! Hierzu werde noch vorausgesetzt, daß die Cartansche Ableitung $\alpha = d\omega$ von ω in einer Umgebung von p den konstanten Rang $2m = M < N$ hat [2]).

Wegen $d\alpha = ddw = 0$ ist die Bedingung (1.2) von Satz 1 und von Satz 2 erfüllt. Daher existiert nach Satz 1 die charakteristische geblätterte Struktur

[1]) Trivialer Spezialfall des in [2] S. 147 bewiesenen Hilfssatzes!

[2]) Das Verhalten der Lösungen des Pfaffschen Problems für ω in der Umgebung singulärer Punkte von $d\omega$ wird hier also nicht studiert!

von α. Jetzt sei U so klein gewählt, daß die charakteristische Quotientenmannigfaltigkeit $\bar{U}$ der Einschränkung $\alpha|_U$ von α auf U existiert. $\pi: U \to \bar{U}$ sei die kanonische Abbildung. Nach Satz 2 existiert ein $\bar{\alpha}$ auf $\bar{U}$ mit $\alpha = \pi^* \bar{\alpha}$. Nach Corollar 1 von Satz 2 ist $d\bar{\alpha} = 0$. Da wir hier nur lokale Untersuchungen machen, können wir annehmen, es gebe ein $\bar{\omega}$ mit $\bar{\alpha} = d\bar{\omega}$. Die Klasse von $\bar{\omega}$ ist nach Satz 3 gleich $2m$. Sei

$$\bar{\omega} = \bar{y}_1 d\bar{x}_1 + \cdots + \bar{y}_m d\bar{x}_m. \tag{3.1}$$

Da es durch den Punkt $p \in U$ lokale differenzierbare Schnitte von $\bar{U}$ in U gibt, ist nach Satz 7 die Klasse von $\pi^* \bar{\omega}$ gleich $2m$. Nach Corollar 2 von Satz 2 ist $\omega - \pi^* \bar{\omega}$ geschlossen. Wegen des lokalen Charakters unserer Untersuchungen können wir wieder annehmen, daß eine Funktion Ω existiert mit

$$d\Omega = \omega - \pi^* \bar{\omega}. \tag{3.2}$$

Ist Ω längs den Charakteristiken von α konstant, d.h. gibt es ein $\bar{\Omega}$ auf $\bar{U}$ mit $\Omega = \bar{\Omega} \circ \pi$, so kann man nach Satz 5 ein kanonisches Koordinatensystem $\bar{x}'_1, \ldots, \bar{x}'_m, \bar{y}'_1, \ldots, \bar{y}'_m$ auf $\bar{U}$ finden mit

$$\bar{y}_1 d\bar{x}_1 + \cdots + \bar{y}_m d\bar{x}_m + d\bar{\Omega} = \bar{y}'_1 d\bar{x}'_1 + \cdots + \bar{y}'_m d\bar{x}'_m. \tag{3.3}$$

Dann ist die Klasse von ω gleich $2m$ und

$$\omega = y'_1 dx'_1 + \cdots + y'_m dx'_m \tag{3.4}$$

eine Normaldarstellung, wobei $y'_i = \bar{y}'_i \circ \pi$, $x'_i = \bar{x}'_i \circ \pi$, $i = 1, \ldots, m$ gesetzt ist.

Ist dagegen Ω nicht konstant längs den Charakteristiken von α, so ist die Klasse von ω gleich $2m+1$ und

$$\omega = y_1 dx_1 + \cdots + y_m dx_m + d\Omega \tag{3.5}$$

eine Normaldarstellung, wobei jetzt $y_i = \bar{y}_i \circ \pi$, $x_i = \bar{x}_i \circ \pi$, $i = 1, \ldots, m$ gesetzt ist. In diesem Falle kann es keine Darstellung der Gestalt (3.4) geben. Denn gäbe es eine solche, so wäre

$$\begin{aligned} d\Omega &= (y'_1 dx'_1 + \cdots + y'_m dx'_m) - (y_1 dx_1 + \cdots + y_m dx_m) \\ &= \pi^* \left((\bar{y}'_1 d\bar{x}'_1 + \cdots + \bar{y}'_m d\bar{x}'_m) - (\bar{y}_1 d\bar{x}_1 + \cdots + \bar{y}_m d\bar{x}_m) \right). \end{aligned}$$

$d\Omega$ wäre also Bild einer Differentialform von $\bar{U}$ vermöge π^*, und folglich wäre Ω konstant längs den Charakteristiken von α entgegen der obigen Annahme.

Literatur

[1] Breuer, M.: Verallgemeinerung der Cauchyschen Charakteristikentheorie. J. reine u. angewandte Mathematik **204**, 139–151 (1960).

[2] Carathéodory, C.: Variationsrechnung. Berlin u. Leipzig 1935.

Bonn a. Rh., Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 8. März 1961)

Hoehnke, H.-J.
Math. Zeitschr. 77, 68—80 (1961)

Über die Erzeugung von monomialen Gruppendarstellungen durch Brandtsche Gruppoide

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

Hans-Jürgen Hoehnke

Einleitung

Jedem Gruppoid Γ kann eine durch Γ eindeutig bestimmte Gruppe $\mathfrak{T}(\Gamma)$ als (zweiseitiger) Γ-Operatorenbereich zugeordnet werden, deren Elemente rechts- bzw. linksseitig angewandt, eineindeutige Abbildungen von Γ auf sich, also Permutationen der Elemente von Γ hervorrufen. Eine invariante Definition der Elemente von $\mathfrak{T}(\Gamma)$ lautet: Jedes Element $t \in \mathfrak{T}(\Gamma)$ ist ein in Γ enthaltener Komplex einander nicht (d.h. weder rechts noch links) zugehöriger Elemente, deren Rechtseinheiten wie Linkseinheiten sämtliche Einheiten von Γ durchlaufen. Demnach ist jedes t ein maximaler Komplex einander nicht zugehöriger Elemente von Γ; ist Γ ein endliches Gruppoid, so gilt auch die Umkehrung. Die Multiplikation in der Gruppe $\mathfrak{T}(\Gamma)$ wie die rechts- und linksseitige äußere Verknüpfung zwischen Γ und $\mathfrak{T}(\Gamma)$ sind durch die gewöhnliche Komplexmultiplikation in Γ definiert. Die Gruppe $\mathfrak{T}(\Gamma)$ wurde als Permutationsgruppe schon von A. Loewy [3] betrachtet und wird daher die Loewysche Gruppe des Gruppoids Γ genannt. Stellt man Γ in der Symbolik von Abschnitt 2 als Matrizengruppoid $G \times S_I$ dar, so läßt sich $\mathfrak{T}(G \times S_I)$ auch als Gruppe monomialer Matrizen auffassen. Dann sind alle inneren und äußeren Verknüpfungen mit der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation identisch.

Von zahlreichen weiteren Arbeiten, die sich mit den Gruppeneigenschaften von $\mathfrak{T}(\Gamma)$ als Permutationsgruppe bzw. monomiale Gruppe beschäftigen, seien hier nur die folgenden erwähnt: [4] (Erzeugendensysteme und definierende Relationen), [5] (Struktur) und [6], [9] (Darstellungstheorie). Für $\mathfrak{T}(G \times S_I)$ wird in [4] und [9] das Symbol $\Xi_I(G)$ verwendet. O. Ore [5, p. 17] nennt diese Gruppe die volle monomiale Gruppe $\Sigma_I(G)$ vom Grad $|I|$ oder auch die Symmetrie vom Grad $|I|$ der Gruppe G. Bei G. Pólya [7, p. 178], der stattdessen das Symbol $\Xi_I[G]$ benutzt, findet sich dafür der Name Gruppenkranz (vgl. auch [1]).

Nähere Einzelheiten über die Verwendung der Loewyschen Gruppe in der Theorie der Gruppoide werden später mitgeteilt. Die Aufgabe der vorliegenden Note besteht darin, die zweiseitige äußere Verknüpfung eines Gruppoides mit seiner Loewyschen Gruppe in die Theorie der (H, G)-Systeme $\mathfrak{A}$ einzuordnen, deren Definition in Abschnitt 1 gegeben wird. Während man in [10, p. 128], wo diese Systeme zur Gewinnung von monomialen Darstellungen, also

homomorphen Abbildungen einer Gruppe G in eine volle monomiale Gruppe, eingeführt wurden, voraussetzt, daß die Gruppe G rechtsseitig transitiv auf die Menge $\mathfrak{A}$ wirkt, haben wir den Fall eines in einem beliebigen (H, G)-System $\mathfrak{A}$ enthaltenen (H, H)-Teilsystems $\mathfrak{A}_H$ zu betrachten, dessen rechts- und linksseitige Intransitivität sich derart „ausgleicht", daß jedes rechtsseitige Transitivitätsgebiet mit jedem linksseitigen Transitivitätsgebiet einen nichtleeren Durchschnitt hat. Faßt man ein (H, H)-System $\mathfrak{A}_H$ in natürlicher Weise auf als eine Menge mit dem (äußeren) direkten Produkt $H \times H^0$ als Linksoperatorenbereich, wo H^0 die zu H antiisomorphe Gruppe bezeichnet, so ist die genannte Forderung gleichbedeutend damit, daß $\mathfrak{A}_H$ transitiv bezüglich $H \times H^0$ sein soll. Jedoch wird hier von dieser Deutung weiter kein Gebrauch gemacht. Jedes Gruppoid Γ ist bezüglich $H = G = \mathfrak{T}(\Gamma)$ ein solches System $\mathfrak{A}_H$. Umgekehrt erhält man nach Hinzunahme weiterer Bedingungen, denen auch dieses Beispiel genügt, eine Familie von intransitiven (H, H)-Systemen $\mathfrak{A}_H$, so daß jedes System $\mathfrak{A}_H$ mit einem gewissen Gruppoid Δ identifiziert werden darf. Die Gruppoide Δ sind dabei als $(\mathscr{H}^*, \mathscr{H})$-Systeme aufzufassen, wo $\mathscr{H}^*$, $\mathscr{H}$ zwei geeignete zu H isomorphe Untergruppen der Loewyschen Gruppe $\mathfrak{T}(\Delta)$ sind. So wird z. B. vorausgesetzt, daß rechtsseitige und linksseitige Transitivitätsgebiete von $\mathfrak{A}_H$ in gleicher Anzahl (Kardinalzahl) auftreten. $H \subseteqq G$ wird zugelassen, weil der Hauptsatz (Satz 13) in dieser (verglichen mit dem Fall $H = G$) allgemeineren Fassung eine direkte Anwendung auf die Darstellung der Teilgruppoide eines Gruppoids Γ als Faktorgruppoide gewisser Untergruppen von $\mathfrak{T}(\Gamma)$ gestattet, wie später gezeigt werden kann. Spezielle Anwendung auf obiges Beispiel $\mathfrak{A}_H = \Gamma$ ergibt natürlich $\Gamma \cong \Delta$, $\mathfrak{T}(\Gamma) \cong \mathscr{H} = \mathscr{H}^* = \mathfrak{T}(\Delta)$.

Die Rückführung von $\mathfrak{A}_H$ auf Δ beruht darauf, daß für Δ das mit der rechtsseitigen G-Fixgruppe U eines Elementes $A \in \mathfrak{A}_H$ gebildete Faktorgruppoid H/U gewählt werden kann. Während die rechtsseitige Wirkung von $\mathscr{H}$ auf H/U stets durch diejenige von H auf H/U ersetzt werden darf, ist die analoge Ersetzung der linksseitigen Wirkung von $\mathscr{H}^*$ auf H/U nicht immer möglich, da $H \to \mathscr{H}^* \subseteqq \mathfrak{T}(H/U)$ eine komplizierte monomiale Darstellung ist, die sich nur dann vereinfacht, wenn eine weitere zusätzliche Bedingung erfüllt ist. Die Darstellung $H \to \mathscr{H}^*$ ist transitiv im Sinne von O. Ore [*5*, p. 57]. Daß ihrer Erzeugung im Unterschied zu [*5*] und [*10*, p. 128] auch ein intransitives System $\mathfrak{A}_H$ zugrunde gelegt werden kann, mag zunächst vielleicht etwas überraschend erscheinen. Eine Erklärung hierfür findet sich im letzten Abschnitt.

1. Intransitive Systeme

Es bezeichne $\mathfrak{A}$ eine Menge von Elementen $A, B, \ldots$ und G eine Gruppe von Elementen $x, y, \ldots$ und mit dem Einselement e. Nach einer gegebenen Verknüpfungsvorschrift sei für jedes Paar $A \in \mathfrak{A}$, $x \in G$ eindeutig das Produkt Ax erklärt. Ebenso sei eine zweite Verknüpfung gegeben, nach der für jedes Paar $A \in \mathfrak{A}$, $y \in H$, wobei H eine feste Untergruppe von G bezeichnet, eindeutig das Produkt yA erklärt ist. Die Menge aller Produkte Ax bzw. yA werde mit $\mathfrak{A}G$ bzw. $H\mathfrak{A}$ bezeichnet. Wir machen vier Voraussetzungen:

I. $\mathfrak{A}$ ist ein (H, G)-*System*[1]), d.h. es bestehen die folgenden Regeln.

Ia. $\mathfrak{A}G \subseteqq \mathfrak{A}$, $H\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{A}$.

Ib. *Assoziativität* von

$$\mathfrak{A}GG, \qquad HH\mathfrak{A}, \qquad H\mathfrak{A}G$$

(gemeint sind hierbei die Regeln $A(x_1 x_2) = (A x_1) x_2$ $(A \in \mathfrak{A},\ x_i \in G)$, ... usw.).

Ic. *Identität.* Für alle A ist $Ae = eA = A$. (Die allgemeine Definition eines (H, G)-Systems, die sich nicht darauf beschränkt, daß H eine Untergruppe von G ist, erhält man, wenn hierin eA durch $e'A$ ersetzt wird, wo e' die Eins der Gruppe H ist.)

II. Zu H gehöre eine Teilmenge $\mathfrak{A}_H$ von $\mathfrak{A}$ und eine Einteilung der Elemente von $\mathfrak{A}_H$ in fremde, nichtleere Komplexe $\mathfrak{A}_{ik}$ $(i, k \in I)$

$$\begin{array}{c} \mathfrak{A}_{11}, \ldots, \mathfrak{A}_{1r}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{A}_{r1}, \ldots, \mathfrak{A}_{rr}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

so daß die Vereinigungsmenge jeder Zeile (Spalte) ein rechtsseitiges (bzw. linksseitiges) Transitivitätsgebiet von H darstellt. I ist eine Indexmenge beliebiger Mächtigkeit $|I|$; wir dürfen annehmen, daß I die Zahlen $1, 2, \ldots, r$ enthält, falls $|I| \geqq r$ [2]).

Eine solche Einteilung kann man auch als Durchschnitt rechts- und linksseitiger Transitivitätsgebiete von H auf der Menge $\mathfrak{A}_H$ auffassen. Die Komplexe $\mathfrak{A}_{ik}$ sollen daher *Transitivitätsdurchschnitte* genannt werden.

Aus diesen Annahmen ergeben sich bereits einige einfache Folgerungen. Da nach II. insbesondere

$$\mathfrak{A}_H H \subseteqq \mathfrak{A}_H, \qquad H\mathfrak{A}_H \subseteqq \mathfrak{A}_H$$

sein soll, so ist $\mathfrak{A}_H$ ein (H, H)-System. Aus jedem Komplex $\mathfrak{A}_{ii}$ wähle man ein Element A_i $(i \in I)$ und bilde die *rechtsseitige Fixgruppe* U_i von A_i in G, das ist diejenige Untergruppe von G, die bezüglich der Eigenschaft $A_i U_i = A_i$ maximal ist. Wegen $(x A_i) U_i = x A_i$ läßt U_i auch alle Elemente der Komplexe mit dem Spaltenindex i fest. Nach II. gibt es Elemente $a_i, b_i \in H$, so daß $A_i = a_i A_1 b_i$ wird. Es folgt

$$A_i b_i^{-1} U_1 b_i = a_i A_1 U_1 b_i = a_i A_1 b_i = A_i,$$

also $b_i^{-1} U_1 b_i \subseteqq U_i$; entsprechend ist $b_i U_i b_i^{-1} \subseteqq U_1$ und daher

$$U_i = b_i^{-1} U_1 b_i \qquad (i \in I). \tag{1}$$

Die Reihe[3]) $A_1, \ldots, A_r, \ldots$ soll eine *Diagonale von* $\mathfrak{A}_H$ heißen. Es sei x irgendein Element von H. Dann existiert nach II. ein Element $y \in H$ und ein

[1]) Vgl. [*10*, p. 128].

[2]) Diese Vereinbarung ermöglicht auch bei unendlichem I eine anschauliche und bequeme Ausdrucksweise; sie bedeutet nicht etwa, daß dann obiges Schema nur abzählbar viele Zeilen und Spalten haben soll. Man kann die Menge I auch als wohlgeordnet voraussetzen.

[3]) Man beachte Fußnote 2.

Index j, so daß $A_1 x = y A_j$ oder $A_j = y^{-1} A_1 x$. Genauso wie bei (1) folgt $x^{-1} U_1 x = U_j$, d.h. die Gruppen U_i $(i \in I)$ bilden ein vollständiges System zu $U = U_1$ bezüglich H konjugierter Untergruppen von G.

Die Annahmen I. und II. werden durch zwei vereinfachende Zusatzbedingungen verschärft:

III. Durch die Abbildung $A \to A\,x$ und ebenso durch die Abbildung $A \to x A$ $(A \in \mathfrak{A}_H,\ x \in H)$ soll x eindeutig bestimmt sein; d.h. $A\,x = A$ sowie auch $x A = A$ für alle $A \in \mathfrak{A}_H$ und beliebiges, aber festes $x \in H$ soll (unter Hinzunahme von Ic.) $x = e$ nach sich ziehen. Die erste Hälfte dieser Forderung ist gleichbedeutend mit

$$\bigcap_{i \in I} U_i \cap H = \{e\}.$$

IV. Die Untergruppen U_i $(i \in I)$ sollen paarweise verschieden sein.

Für $|I| = 1$ ist IV. trivialerweise erfüllt, und für $|I| = 2$ ist IV. wegen III. erfüllt, falls $U_1 \cap H \neq \{e\}$ ist.

Ein System $\mathfrak{A}$, das die Forderungen I. bis IV. erfüllt, soll kurz als (H, G)-*System mit intransitivem Teilsystem* $\mathfrak{A}_H$ bezeichnet werden.

Da $\mathfrak{A}_H$ ein (H, H)-System ist, so sind die zu einem Element $y \in H$ gehörigen Abbildungen $X \to X y$ und $X \to y^{-1} X$ $(X \in \mathfrak{A}_H)$ von $\mathfrak{A}_H$ Permutationen der Elemente von $\mathfrak{A}_H$. Da man alle Elemente von $\mathfrak{A}_H$ erhält, wenn in $A_i x$ i bzw. x die Elemente von I bzw. H durchläuft (wobei im allgemeinen jedes Element von $\mathfrak{A}_H$ mehrmals auftritt), so kann man diese Permutationen auch in der Form

$$\mathfrak{p}\, y = \begin{pmatrix} A_i\, x \\ A_i\, x\, y \end{pmatrix}, \quad y\, \mathfrak{p} = \begin{pmatrix} A_i\, x \\ y^{-1} A_i\, x \end{pmatrix}$$

schreiben. Aus III. ergibt sich, daß die Abbildungen $y \to \mathfrak{p}\, y$ und $y \to y\, \mathfrak{p}$ treue Darstellungen von H sind. Damit hat man den

Satz 1. *Ist $\mathfrak{A}_H$ ein zu H gehöriges intransitives Teilsystem eines (H, G)-Systems $\mathfrak{A}$, so gestattet H zwei treue intransitive Darstellungen $\mathfrak{p} H$ und $H \mathfrak{p}$ durch Permutationen der Elemente von $\mathfrak{A}_H$:*

$$H \ni y \to \mathfrak{p}\, y = \begin{pmatrix} A_i\, x \\ A_i\, x\, y \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} H, \qquad H \ni y \to y\, \mathfrak{p} = \begin{pmatrix} A_i\, x \\ y^{-1} A_i\, x \end{pmatrix} \in H \mathfrak{p}.$$

Dabei sind die Zeilen des Schemas der $\mathfrak{A}_{ik}$ die Transitivitätsgebiete von $\mathfrak{p} H$ und die Spalten die Transitivitätsgebiete von $H \mathfrak{p}$.

Sind H, U Untergruppen einer Gruppe G, so kann man das in [2, Teil II] eingeführte Faktorgruppoid H/U bilden. Seine Elemente sind die Komplexe $y U x$ von G $(y, x \in H)$, oder mit anderen Worten die Nebenklassen $U_i x$ $(i \in I,\ x \in H)$, wobei U_i die voneinander verschiedenen zu $U = U_1$ unter H konjugierten Untergruppen $y^{-1} U y$ von G durchläuft.

Nimmt man

$$(U_i\, x) \circ y = U_i\, x\, y, \qquad y \circ (U_i\, x) = y\, U_i\, x$$

als äußere Verknüpfung zwischen H/U und H ($(\circ)$ wird also auf die gewöhnliche Multiplikation der Elemente eines Komplexes $U_i x$ von rechts bzw. links mit einem Element y zurückgeführt), so wird H/U zu einem (H, H)-System. Für den in Satz 1 betrachteten Fall ergibt sich mit Rücksicht auf III.:

SATZ 2. *Die Untergruppe H gestattet zwei treue Darstellungen $\mathfrak{p}H$ und $H\mathfrak{p}$ durch Permutationen der Elemente des Faktorgruppoids H/U:*

$$H \ni y \to \mathfrak{p}\, y = \begin{pmatrix} U_i x \\ U_i x y \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} H, \qquad H \ni y \to y \mathfrak{p} = \begin{pmatrix} U_i x \\ y^{-1} U_i x \end{pmatrix} \in H \mathfrak{p}.$$

In der Folge wird sich der Zusammenhang von $\mathfrak{p}H$ mit $\mathfrak{p}H$ und von $H\mathfrak{p}$ mit $H\mathfrak{p}$ aufklären.

In einem (H, G)-System $\mathfrak{A}$ mit intransitivem $\mathfrak{A}_H$ soll das Teilsystem $\mathfrak{A}_H$ *diagonalisiert* heißen, wenn die oben betrachtete Diagonale $A_1, \ldots, A_r, \ldots$ von $\mathfrak{A}_H$ bei allen Transformationen mit Elementen aus H in sich übergeht, d.h. wenn für jedes $x \in H$ die Reihe $x^{-1}A_1 x, \ldots, x^{-1}A_r x, \ldots$ bis auf ihre Anordnung mit $A_1, \ldots, A_r, \ldots$ übereinstimmt [4]).

2. Die Loewysche Gruppe

In [2, Teil I, Abschnitt 3] wird gezeigt, daß jedes Gruppoid zu einem Matrizengruppoid isomorph ist. Daher dürfen wir im folgenden von einem Gruppoid ausgehen, das als Matrizengruppoid, also nach [2, Teil II] als direktes Produkt $\Gamma = G \times S_I$ gegeben ist, wo G eine Gruppe und $S_I = \{e_{ik} | i, k \in I\}$ ein schlichtes Gruppoid ist. Die Elemente (g, e_{ik}) von Γ schreiben wir mit Auslassung der Klammern in der Form $g\, e_{ik}$ und setzen $g\, e_{ik} = e_{ik}\, g$ $(i, k \in I)$. Das Produkt $f\, e_{ih} \cdot g\, e_{jk}$ existiert genau dann, wenn $h = j$; sein Wert ist $fg\, e_{ik}$. Es sei t ein in Γ enthaltener Komplex, bestehend aus einander nicht zugehörigen Elementen, deren Rechtseinheiten sämtliche Einheiten $e\, e_{ii}$ $(i \in I)$ von Γ durchlaufen; das gleiche gelte auch bezüglich der Linkseinheiten der zu t gehörigen Elemente. Solche Komplexe wurden bereits von F. K. SCHMIDT [8, p. 95] eingeführt; sie können in der Form

$$\mathfrak{t} = \{t_i\, e_{i j_i} | t_i \in G,\ i \in I\}$$

geschrieben werden, wo

$$\begin{pmatrix} 1, \ldots, r, \ldots \\ j_1, \ldots, j_r, \ldots \end{pmatrix} = \tau$$

eine Permutation aus der (uneingeschränkten) symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_I$ ist. Wir benutzen dafür auch die abgekürzte Schreibweise

$$\mathfrak{t} = \langle t_i\, e_{i, i\tau} \rangle \qquad (i\tau = j_i;\ i \in I).$$

Die Gesamtheit dieser Komplexe sei $\mathfrak{T}(\Gamma)$. Dann gilt der

[4]) Durch Transformation mit $\begin{pmatrix} U_i x \\ x^{-1} U_i \end{pmatrix}$ erkennt man sofort, daß $\mathfrak{p}H$ und $H\mathfrak{p}$ sich nur in der Benennung der Glieder unterscheiden. Ist $\mathfrak{A}_H$ diagonalisiert, so geht auch $\mathfrak{p}H$ durch Transformation mit $\begin{pmatrix} A_i x \\ x^{-1} A_i \end{pmatrix}$ in $H\mathfrak{p}$ über.

Satz 3. *Die Menge $\mathfrak{T}(\Gamma)$ ist mit der Komplexmultiplikation als Kompositionsgesetz eine Gruppe. Ist Γ ein endliches Gruppoid der Ordnung $|G|$ (= Ordnung von G) und vom Rang $|I|$, so hat $\mathfrak{T}(\Gamma)$ die Ordnung $|G|^{|I|}\cdot|I|!$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{s}=\langle s_i e_{i,i\sigma}\rangle$ ein zweiter Komplex, so wird (mit $i(\sigma\tau)=(i\sigma)\tau$)

$$\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}=\langle s_i e_{i,i\sigma}\rangle\langle t_{i\sigma} e_{i\sigma,(i\sigma)\tau}\rangle=\langle s_i t_{i\sigma} e_{i,i(\sigma\tau)}\rangle. \tag{2}$$

$\mathfrak{T}(\Gamma)$ hat $\mathfrak{e}=\langle e e_{ii}\rangle$ als Eins, und $\mathfrak{t}$ hat $\mathfrak{t}^{-1}=\langle t_i^{-1} e_{i\tau,i}\rangle$ als Inverses. Die Ordnung von $\mathfrak{T}(\Gamma)$ bestimmt man durch einfache Abzählung.

Die Gruppe $\mathfrak{T}(\Gamma)$ soll *Loewysche Gruppe* des Gruppoids Γ heißen. Sie tritt (im endlichen Fall) bei Loewy [3] als eine gewisse Permutationsgruppe $\mathfrak{P}^*$ auf, wobei auch ihre Ordnung angegeben wurde [3, p. 253, Z. 2]. Man vergleiche dazu ferner den nachstehenden Satz 5.

Mit $X\mathfrak{t}$ bzw. $\mathfrak{t}X$ werde das Komplexprodukt $\{X\}\mathfrak{t}$ bzw. $\mathfrak{t}\{X\}$ bezeichnet. Dadurch ist eine (äußere) Verknüpfung des Gruppoids Γ von rechts und links mit der Gruppe $\mathfrak{T}(\Gamma)$ definiert, für die offenbar $\Gamma\,\mathfrak{T}(\Gamma)$, $\mathfrak{T}(\Gamma)\,\Gamma\subseteq\Gamma$ gilt. Werden die Elemente von Γ als Matrizen aufgefaßt, so lassen sich diese äußeren Verknüpfungen wie die Multiplikation in $\mathfrak{T}(\Gamma)$ isomorph wiedergeben, wenn man die Komplexe $\mathfrak{t}$ als monomiale Matrizen deutet. Hieraus erkennt man die Richtigkeit von

Satz 4. *Jedes Gruppoid $\Gamma=G\times S_I$ ist bezüglich der zweiseitigen Verknüpfung mit seiner Loewyschen Gruppe $\mathfrak{T}(\Gamma)$ ein diagonalisiertes intransitives $(\mathfrak{T}(\Gamma),\mathfrak{T}(\Gamma))$-System mit den Transitivitätsdurchschnitten $\mathfrak{A}_{ik}=Ge_{ik}$ und der Diagonalen $A_i=ee_{ii}$ $(i\in I)$.*

Aus den Sätzen 1 und 4 ergibt sich der

Satz 5. *Die Loewysche Gruppe $\mathfrak{T}(\Gamma)$ eines Gruppoids Γ besitzt zwei treue intransitive Darstellungen $\mathfrak{p}\,\mathfrak{T}(\Gamma)$ und $\mathfrak{T}(\Gamma)\,\mathfrak{p}$ durch Permutationen der Elemente X von Γ:*

$$\mathfrak{T}(\Gamma)\ni\mathfrak{t}\to\mathfrak{p}\,\mathfrak{t}=\begin{pmatrix}X\\X\,\mathfrak{t}\end{pmatrix}\in\mathfrak{p}\,\mathfrak{T}(\Gamma),\qquad \mathfrak{T}(\Gamma)\ni\mathfrak{t}\to\mathfrak{t}\,\mathfrak{p}=\begin{pmatrix}X\\\mathfrak{t}^{-1}\,X\end{pmatrix}\in\mathfrak{T}(\Gamma)\,\mathfrak{p}.$$

Die Transitivitätsgebiete von $\mathfrak{p}\,\mathfrak{T}(\Gamma)$ bzw. $\mathfrak{T}(\Gamma)\,\mathfrak{p}$ sind $\bigcup_{k\in I} Ge_{ik}$ $(i\in I)$ bzw. $\bigcup_{i\in I} Ge_{ik}$ $(k\in I)$.

3. Rechtsseitige Wirkung von H auf $\mathfrak{A}_H$

Es soll die Wirkung der Elemente von H als rechtsseitige Operatoren des intransitiven Teilsystems $\mathfrak{A}_H$ eines (H,G)-Systems $\mathfrak{A}$ untersucht werden. Zu der Diagonalen $A_1,\ldots,A_\tau,\ldots$ von $\mathfrak{A}_H$ mögen die Fixgruppen $U_1=U,\ldots,U_\tau,\ldots$ gehören. Dann gilt zunächst der

Satz 6. *Die Zuordnung $A_i x\to U_i x$ $(i\in I,\ x\in H)$ vermittelt eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathfrak{A}_H$ auf das Faktorgruppoid H/U.*

Beweis. Genau die Elemente von $\mathfrak{A}_H$ bzw. H/U sind von der Form $A_i x$ bzw. $U_i x$ $(i\in I,\ x\in H)$. Aus $x,y\in H$ und

$$\begin{array}{cc}A_i x=A_k y\\ \downarrow\quad\downarrow\\ U_i x\quad U_k y\end{array}$$

folgt $i=k$, da für $i \neq k$ nach II. stets auch $A_i x \neq A_k y$ ist. Daher wird $A_i = A_i y x^{-1}$, $y x^{-1} = u \in U_i$ und $U_k y = U_i y = U_i u x = U_i x$. — Aus

$$\begin{array}{ccc} A_i x & & A_k y \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_i x & = & U_k y \end{array}$$

folgt $U_i = U_k y x^{-1}$, $y x^{-1} = u \in U_i$, $U_i = U_k$ und damit nach IV. auch $i=k$ und weiter $A_k y = A_i y = A_i u x = A_i x$.

SATZ 7. *Die Abbildung $A_i x \to U_i x$ $(i \in I,\ x \in H)$ ist operatortreu bezüglich der Untergruppe H als rechtsseitigem Operatorenbereich von $\mathfrak{A}_H$ und von H/U, d.h. für $y \in H$ ist $(A_i x) y \to (U_i x) y$.*

BEWEIS. Es ist

$$(A_i x)\, y = A_i (x y) \to U_i (x y) = (U_i x)\, y .$$

Aus Satz 7 ist zu ersehen, daß die in Satz 1 und Satz 2 vorkommenden Permutationsgruppen $\mathfrak{p}H$ und pH sich nur durch die Benennung ihrer Glieder unterscheiden, m.a.W. entspricht der rechtsseitigen Wirkung von H auf $\mathfrak{A}_H$ eineindeutig die rechtsseitige Wirkung von H auf H/U. Statt sich auf die äußere Verknüpfung von H/U mit H zu stützen, kann man auch die in Abschnitt 2 erklärte äußere Verknüpfung von H/U mit seiner Loewyschen Gruppe heranziehen. Es gilt nämlich der

SATZ 8. *Die Zuordnung*

$$H \ni x \to \mathfrak{x} = \{U_i x \mid i \in I\}$$

stellt eine isomorphe Abbildung von H auf die Gruppe $\mathfrak{H}$ der Systeme $\mathfrak{x}$ dar. $\mathfrak{H}$ ist eine Untergruppe der Loewyschen Gruppe $\mathfrak{L}(H/U)$ des Faktorgruppoids H/U.

BEWEIS. Aus $x, y \in H$ und

$$\begin{array}{ccc} x & & y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{x} & = & \mathfrak{y} \end{array}$$

ergibt sich $U_i x = U_{j_i} y$, also $U_i = U_{j_i} y x^{-1}$ $(i \in I)$ und

$$y x^{-1} = d \in \bigcap_{i \in I} U_i \cap H .$$

Wegen III. muß $d = e$, $y = x$ sein. — Die Gruppen $x^{-1} U_i x$ $(i \in I)$ sind für $x \in H$ bis auf die Indizierung identisch mit den Gruppen U_i $(i \in I)$. Daher kann $\mathfrak{x}$ auch in der Form

$$\mathfrak{x} = \{x U_i \mid i \in I\}$$

geschrieben werden, so daß hinsichtlich der Komposition in $\mathfrak{L}(H/U)$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \{x U_i y \mid i \in I\} = \{U_i x y \mid i \in I\}$$

und $xy \to \mathfrak{x}\mathfrak{y}$ wird.

SATZ 9. *Die Abbildungen*

$$A_i x \to U_i x \quad (i \in I,\ x \in H) \quad \textit{und} \quad y \to \mathfrak{y} = \{U_i y \mid i \in I\}$$

von $\mathfrak{A}_H$ auf H/U und von H auf $\mathscr{H}$ haben die Eigenschaft, daß $(A_i x)\,y \succ (U_i x)\,\mathfrak{y}$ gilt, d.h. der rechtsseitigen Wirkung von H auf $\mathfrak{A}_H$ entspricht eineindeutig die rechtsseitige Wirkung von $\mathscr{H} \subseteq \mathfrak{T}(H/U)$ auf H/U.

Beweis. Für $U_i x \in H/U$ ist

$$U_i x\,\mathfrak{y} = U_i x\, x^{-1} U_i x\, y = U_i x\, y.$$

Denn das einzige Element des Systems $\mathfrak{y}$, mit welchem $U_i x$ komponierbar bezüglich der in H/U erklärten Verknüpfung ist, ist das Element $x^{-1} U_i x y$, dessen Linkseinheit $x^{-1} U_i x$ gerade die Rechtseinheit von $U_i x$ ist.

4. Linksseitige Wirkung von H auf $\mathfrak{A}_H$

Ähnlich der rechtsseitigen Wirkung kann auf H/U auch die linksseitige Wirkung von H auf $\mathfrak{A}_H$ übertragen werden. Gemäß II. sind nämlich für jedes Element $x \in H$ die Gleichungen

$$x A_i = A_{k_i} x_i^* \qquad (i \in I)$$

mit $x_i^* \in H$ und mit eindeutig durch x bestimmten Indizes k_i lösbar. Daraus erhält man zunächst den

Satz 10. *Die Zuordnung*

$$H \ni x \to \mathfrak{x}^* = \{x_i^* U_i \mid i \in I\}$$

ist eine isomorphe Abbildung von H auf die Gruppe $\mathscr{H}^*$ der Systeme $\mathfrak{x}^*$. Die Gruppe $\mathscr{H}^*$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{T}(H/U)$.

Beweis. Aus $x, y \in H$ und

$$\begin{array}{cc} x = & y \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathfrak{x}^* & \mathfrak{y}^* \end{array}$$

ergeben sich mit $y A_i = A_{l_i} y_i^*$ der Reihe nach die Beziehungen

$$A_{k_i} x_i^* = A_{l_i} y_i^*, \qquad k_i = l_i, \qquad A_i (x_i^*)^{-1} y_i^* = A_i,$$
$$(x_i^*)^{-1} y_i^* = u_i \in U_i, \qquad y_i^* U_i = x_i^* u_i U_i = x_i^* U_i$$

und somit $\mathfrak{y}^* = \mathfrak{x}^*$. Umgekehrt folgt aus

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathfrak{x}^* = & \mathfrak{y}^* \end{array}$$

die Beziehung $x_i^* U_i = y_{j_i}^* U_{j_i}$, wonach $U_i = (x_i^*)^{-1} y_{j_i}^* U_{j_i}$, $(x_i^*)^{-1} y_{j_i}^* = u_i \in U_i$ und $U_{j_i} = u_i^{-1} U_i = U_i$, also auch $j_i = i$ $(i \in I)$ ist, da stets $U_i \neq U_k$ für $i \neq k$ sein muß. Demnach wird $y_i^* = x_i^* u_i$. Weiter ist

$$A_{k_i} x_i^* U_i (x_i^*)^{-1} = x A_i U_i (x_i^*)^{-1} = x A_i (x_i^*)^{-1} = A_{k_i}.$$

Daher gilt $U_{k_i} = x_i^* U_i (x_i^*)^{-1}$, und ebenso ist $U_{l_i} = y_i^* U_i (y_i^*)^{-1}$. Folglich wird

$$U_{l_i} = x_i^* u_i U_i u_i^{-1} (x_i^*)^{-1} = x_i^* U_i (x_i^*)^{-1} = U_{k_i}$$

und somit $l_i = k_i$. Hiernach ist $y A_i = A_{l_i} y_i^* = A_{k_i} x_i^* u_i$, d.h. $y A_i = y A_i u_i^{-1} = x A_i$, bzw. $x^{-1} y A_i = A_i$ $(i \in I)$, so daß im Hinblick auf III. $x^{-1} y = e$ bzw. $y = x$ wird. Ferner ist

$$x y A_i = x A_{l_i} y_i^* = A_{k_i} x_{l_i}^* y_i^*,$$

also

$$x y \to \{x_{l_i}^* y_i^* U_i \mid i \in I\}.$$

Andererseits ist bezüglich der Komposition in $\mathfrak{T}(H/U)$

$$\mathfrak{x}^* \mathfrak{y}^* = \{x_{l_i}^* y_i^* U_i \mid i \in I\},$$

da bezüglich der in H/U erklärten Verknüpfung

$$(x_{l_i}^* U_{l_i})(y_i^* U_i) = x_{l_i}^* y_i^* U_i (y_i^*)^{-1} y_i^* U_i = x_{l_i}^* y_i^* U_i$$

gilt. Damit erhält man $x y \to \mathfrak{x}^* \mathfrak{y}^*$.

SATZ 11. *Für die zwei Abbildungen*

$$A_i x \to U_i x \quad (i \in I,\ x \in H) \quad \text{und} \quad y \to \mathfrak{y}^* = \{y_i^* U_i \mid i \in I\}$$

von $\mathfrak{A}_H$ auf H/U und von H auf $\mathscr{H}^*$ gilt die Regel $y(A_i x) \to \mathfrak{y}^*(U_i x)$, d.h. der linksseitigen Wirkung von H auf $\mathfrak{A}_H$ entspricht eineindeutig die linksseitige Wirkung von $\mathscr{H}^* \subseteq \mathfrak{T}(H/U)$ auf H/U.

BEWEIS. Wegen $y A_i x = A_{l_i} y_i^* x \to U_{l_i} y_i^* x$ und

$$\mathfrak{y}^* U_i x = y_i^* U_i x = y_i^* U_i (y_i^*)^{-1} y_i^* x = U_{l_i} y_i^* x$$

ist $y A_i x \to \mathfrak{y}^* U_i x$.

SATZ 12. *Die Gruppe $\mathscr{H}^*$ besitzt eine treue Darstellung $\mathscr{H}^* \mathfrak{p}$ durch Permutationen der Elemente des Faktorgruppoids H/U,*

$$\mathscr{H}^* \ni \mathfrak{y}^* \to \mathfrak{y}^* \mathfrak{p} = \begin{pmatrix} U_i x \\ (\mathfrak{y}^*)^{-1} U_i x \end{pmatrix} \in \mathscr{H}^* \mathfrak{p}.$$

Genau dann ist $\mathscr{H}^* \mathfrak{p} = H p$, wenn es zu jedem Element $y \in H$ ein von i nicht abhängiges Element $y^* \in H$ gibt, welches den Bedingungen

$$y A_i = A_{l_i} y^* \qquad (i \in I)$$

mit von y abhängigen Indizes l_i genügt. Genau dann ist

$$\mathfrak{y}^* \mathfrak{p} = y p \qquad (\mathfrak{y}^* \leftarrow y \in H),$$

wenn das Teilsystem $\mathfrak{A}_H$ diagonalisiert bezüglich $A_1, \ldots, A_r, \ldots$ ist; und dann ist sogar $\mathfrak{y}^* = \mathfrak{y}$.

BEWEIS. Den ersten Teil dieses Satzes entnimmt man mit Rücksicht auf die (H, H)-Systemeigenschaft von $\mathfrak{A}_H$ aus obigem Satz 11. Der restliche Teil der Behauptungen kann durch einfache Überlegungen unmittelbar bestätigt werden.

Die Sätze 6 bis 12 ergeben den zusammenfassenden

SATZ 13 (HAUPTSATZ). *Die zweiseitige Wirkung der Untergruppe $H \subseteq G$ auf ein intransitives (H, H)-Teilsystem $\mathfrak{A}_H \subseteq \mathfrak{A}$ läßt sich isomorph beschreiben durch*

das Faktorgruppoid H/U (von H nach einer Fixgruppe $U \subseteq G$), aufgefaßt als ein $(\mathscr{H}^*, \mathscr{H})$-System, wobei $\mathscr{H}^*$ und $\mathscr{H}$ zwei zu H isomorphe Untergruppen der Loewyschen Gruppe $\mathfrak{T}(H/U)$ sind. Hierbei kann die rechtsseitig auf H/U wirkende Gruppe $\mathscr{H}$ auch durch H ersetzt werden. Der durch $\mathfrak{y}^* \leftarrow \gamma \rightarrow \mathfrak{y}$ $(\mathscr{H}^* \cong H \cong \mathscr{H})$ gegebene Isomorphismus $\mathscr{H}^* \cong \mathscr{H}$ ist genau dann der identische Automorphismus, wenn $\mathfrak{A}_H$ diagonalisiert ist. In diesem Fall kann auch die linksseitig auf H/U wirkende Gruppe $\mathscr{H}^*$ durch H ersetzt werden. Ist das System $\mathfrak{A}$ ein Gruppoid, dessen Einheitenmenge die Diagonale $A_1, \ldots, A_r, \ldots$ enthält und dessen Teilsystem $\mathfrak{A}_H$ diagonalisiert ist, und genügen die Komplexe $\mathfrak{A}_H \mathfrak{A}_H H$ und $H \mathfrak{A}_H \mathfrak{A}_H$ den Assoziativbedingungen (in ähnlichem Sinne wie bei Ib.), *so ist obige Zuordnung zwischen $\mathfrak{A}_H$ und H/U sogar ein Isomorphismus (und folglich $\mathfrak{A}_H$ ein Teilgruppoid von $\mathfrak{A}$). Insbesondere ist dann auch $\mathfrak{A}_H H \mathfrak{A}_H$ assoziativ.*

Bei diesem Satz bleibt nur der letzte Teil der Behauptungen noch zu beweisen. Es seien $A_i x$, $A_k y$ $(x, y \in H)$ irgend zwei komponierbare Elemente von $\mathfrak{A}_H$. Mit $x^{-1} A_i x = A_j$ wird dann

$$\begin{aligned}(A_i x)(A_k y) &= [x(x^{-1} A_i x)](A_k y) \\ &= [(x A_j) A_k] y = [x(A_j A_k)] y.\end{aligned}$$

Danach muß $j = k$ sein. Man erhält $(A_i x)(A_k y) = x A_k y$. Bei der Zuordnung $A_i x \rightarrow U_i x$, die einen Operatorisomorphismus von $\mathfrak{A}_H$ auf H/U bezüglich des zweiseitigen Operatorenbereichs H darstellt, geht A_i in U_i über; somit wird $x A_k y$ auf $x U_k y$ und $x^{-1} A_i x = A_k$ auf $x^{-1} U_i x = U_k$ abgebildet. Folglich existiert auch das Produkt $(U_i x)(U_k y) = x U_k y$. Daher gilt $(A_i x)(A_k y) \rightarrow (U_i x)(U_k y)$. Die umgekehrte Beziehung läßt sich ganz entsprechend beweisen.

5. Erzeugung monomialer Darstellungen

Das der Erzeugung der transitiven monomialen Darstellung $H \rightarrow \mathscr{H}^* \subseteq \mathfrak{T}(H/U)$ dienende Verfahren aus Abschnitt 4 unterscheidet sich wesentlich von der bisher bekannten Erzeugungsart ([5] oder [10, p. 128]). Beide Verfahren sind jedoch enthalten in einer allgemeinen Methode der Erzeugung monomialer Darstellungen einer Gruppe H, die wir jetzt erläutern, und zwar der Kürze halber ohne Zwischenschaltung der (H, G)-Systeme $\mathfrak{A}$.

Es sei $\{W_i\}_{i \in I}$ ein System von Komplexen einer Gruppe G. (Die W_i entsprechen der Wahl von Diagonalelementen A_i eines (H, G)-Systems $\mathfrak{A}$.) In G mögen drei Untergruppen H, K, H^* fest ausgewählt werden, wobei H^* im Normalisator von K enthalten sei. Zu jedem Paar $x \in H$, $i \in I$ sei die Gleichung

$$x W_i = W_{xi} x_i^* \tag{3}$$

nach $xi \in I$ und $x_i^* \in H^*$ auflösbar. Der Index xi sei durch x und i eindeutig bestimmt. Aus $W_i = W_j$ folgen nacheinander die Gleichungen

$$\begin{aligned} x W_i = W_{xi} x_i^* \quad &= x W_j \quad = W_{xj} x_j^*, \qquad xi = xj, \\ x^{-1} W_{xi} = W_i (x_i^*)^{-1} &= x^{-1} W_{xj} = W_j (x_j^*)^{-1}, \qquad i = j. \end{aligned}$$

Daher sind die Komplexe W_i $(i \in I)$ paarweise verschieden. Ebenso ergibt sich aus $xi = xj$, daß auch $i = j$ ist. Demnach ist $i \to xi$ eine eineindeutige Abbildung, und zwar auf I, wie man mittels der weiter unten bewiesenen Relation $(xy)j = x(yj)$ zeigen kann. (Setzt man $j = x^{-1}i$, so wird $xj = ei = i$.) Mit U_i bzw. V_i bezeichnen wir die rechtsseitige Fixgruppe von W_i in K bzw. n H^* und nehmen an, daß

$$V_i \subseteqq U_i \qquad (i \in I). \tag{4}$$

Wegen

$$W_{xi}\, x_i^*\, U_i (x_i^*)^{-1} = x\, W_i\, U_i (x_i^*)^{-1} = x\, W_i (x_i^*)^{-1} = W_{xi}$$

und

$$W_i (x_i^*)^{-1}\, U_{xi}\, x_i^* = x^{-1} W_{xi}\, U_{xi}\, x_i^* = x^{-1} W_{xi}\, x_i^* = W_i$$

ist

$$x_i^*\, U_i (x_i^*)^{-1} \subseteqq U_{xi}, \qquad (x_i^*)^{-1}\, U_{xi}\, x_i^* \subseteqq U_i.$$

Zwischen U_i und U_{xi} besteht somit die wichtige Beziehung

$$U_{xi} = x_i^*\, U_i (x_i^*)^{-1}. \tag{5}$$

Hiernach ist

$$x \to m_x = (x_j^*\, U_j\, \delta_{i, xj}) \tag{6}$$

(wo das angeschriebene Element der Matrix m_x an der Stelle (i, j) steht und δ_{ik} das Kronecker-Symbol ist) eine homomorphe Abbildung, die wir in Erweiterung der bisher üblichen Erklärung gleichfalls eine *monomiale Darstellung von H* nennen. Ihre *Multiplikatoren* $x_i^*\, U_i$ sind im allgemeinen nicht mehr Elemente einer Gruppe, sondern als Elemente der Faktorgruppoide H^*/U_i $(i \in I)$ zu betrachten. Zwei solche Faktorgruppoide sind entweder fremd oder identisch.

Die behauptete Abbildungseigenschaft der Zuordnung (6) ergibt sich wie folgt. Wenn mit einem weiteren Element $y \in H$

$$y \to m_y = (y_j^*\, U_j\, \delta_{i, yj})$$

und $x = y$ ist, so erhält man nach einfacher Zwischenrechnung mit $xj = yj$ und unter Beachtung von (4): $x_j^*\, U_j = y_j^*\, U_j$ und damit auch $m_x = m_y$. Wegen

$$(xy)\, W_j = x(y\, W_j) = x\, W_{yj}\, y_j^* = W_{x(yj)}\, x_{yj}^*\, y_j^* = W_{(xy)j}\, (xy)_j^*$$

gilt $(xy)j = x(yj)$ und

$$\begin{aligned} xy \to m_{xy} &= \left((xy)_j^*\, U_j\, \delta_{i, (xy)j}\right) \\ &= (x_{yj}^*\, y_j^*\, U_j\, \delta_{i, x(yj)}) = m_x\, m_y. \end{aligned}$$

Je zwei Multiplikatoren aus m_x und m_y, die bei der Bildung von $m_x m_y$ multipliziert werden, gehören offenbar zum gleichen Faktorgruppoid.

Analog der klassischen Theorie lassen sich die intransitiven monomialen Darstellungen, also diejenigen mit einer intransitiven Permutationsdarstellung

$$H \ni x \to \begin{pmatrix} xi \\ i \end{pmatrix} \tag{7}$$

aus transitiven monomialen Darstellungen zusammensetzen. Wir betrachten nun vier Beispiele, in denen durchweg angenommen wird, daß (7) eine transitive Permutationsdarstellung von H ist. In den zwei ersten Spezialisierungen sei außerdem $\{W_i\}_{i\in I}$ ein System von rechts- oder linksseitigen Restklassen von G nach (eventuell verschiedenen) Untergruppen U_i' von G, die wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit in der Form $W_i = g_i U_i'$ ($g_i \in G$) schreiben dürfen. Dann gilt offenbar $U_i = K \cap U_i'$ und $V_i = H^* \cap U_i'$.

1) Es sei $G = H$ und $K = H^*$. Ferner sei $U_1' = N$ Normalteiler von K, so daß (wegen (3)) $N = U_i' = U_i = V_i$, $W_i = g_i N$ wird. Aus (3) ist weiter zu ersehen, daß die Zerlegung

$$H = \bigcup_{i\in I} g_i K \tag{8}$$

besteht und $g_i K \neq g_j K$ für $i \neq j$ ist. Es handelt sich hierbei also um die bisher übliche Erzeugung ([5] und [10, p. 128]) der transitiven monomialen Darstellung $x \to m_x$ von H in $\mathfrak{S}_I(K/N)$.

2) Es sei $G = K$ und $H = H^*$. Dann wird $U_i = U_i'$ und $W_i = g_i U_i$. Nach weiterer Spezialisierung reduziert sich dieser Fall auf unsere Vorschrift zur Erzeugung von $H \to \mathscr{H}^*$, wobei $x \to m_x$ mit $x \to \mathfrak{x}^* = \{x_i^* U_i \mid i \in I\}$ zu identifizieren ist. Dieses Resultat wird in den folgenden Beispielen auf beliebige (gemäß (3) miteinander verbundene) Komplexe W_i erweitert.

3) Wir setzen voraus, daß die Fixgruppen U_i paarweise verschieden sind. Wegen (5) ist $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Einheitenteilmenge des Faktorgruppoids H^*/U ($U = U_1$) und bestimmt als solche ein maximales Teilgruppoid $\Delta \subseteq H^*/U$, in welchem sie die genaue Einheitenmenge ist. Offenbar hat $x_i^* U_i \in H^*/U$ die Rechtseinheit U_i und die Linkseinheit U_{x_i}. Folglich ist das System $\mathfrak{x}^* = \{x_i^* U_i \mid i \in I\}$ ein Element der Loewyschen Gruppe $\mathfrak{T}(\Delta)$. Weiter ist $m_x \to \mathfrak{x}^*$ eine isomorphe Abbildung auf eine Untergruppe $\mathscr{H}^* \subseteq \mathfrak{T}(\Delta)$ und die durch $x \to m_x \to \mathfrak{x}^*$ gegebene Abbildung $H \to \mathscr{H}^*$ eine transitive monomiale Darstellung von H in $\mathfrak{T}(\Delta)$. Die linksseitige Wirkung von H auf $\{W_i\}_{i\in I}$ kann durch diejenige von $\mathscr{H}^*$ auf $\{U_i\}_{i\in I}$ ersetzt werden. Die so erzeugte Darstellung $H \to \mathscr{H}^*$ ist nach der allgemeinen Theorie zu einer nach Beispiel 1) erzeugten Darstellung äquivalent (vgl. das nächste Beispiel).

4) Nun sei zugelassen, daß einige der Fixgruppen U_i identisch sein dürfen. Da (7) transitiv sein soll, so gehören die Multiplikatoren von (6) zum gleichen Faktorgruppoid H^*/U ($U = U_1$). Es zeigt sich, daß (6) auch jetzt noch zu einer nach 1) erzeugten (im üblichen Sinn transitiven) monomialen Darstellung von H äquivalent ist. Für K bzw. N kann man in 1) z.B.

$$K^1 = \{x \mid x \in H,\ x1 = 1\} \quad \text{bzw.} \quad N^1 = \{x \mid x \in K^1,\ x_1^* = e\} \tag{9}$$

wählen. Man bestimmt dann Elemente $g_i \in H$ so, daß

$$g_i 1 = i \qquad (i \in I)$$

wird und erhält die (disjunkte) Restklassenzerlegung

$$H = \bigcup_{i\in I} g_i K^1.$$

Aus den Gleichungen

$$x(g_i N^1) = (g_{xi} N^1)\, g_{xi}^{-1} x\, g_i N^1 \qquad (x \in H,\ i \in I)$$

gewinnt man für H die monomiale Darstellung

$$x \to m_x^1 = (g_{xj}^{-1} x\, g_j N^1\, \delta_{i,xj}), \tag{10}$$

deren Multiplikatoren offenbar zur Faktorgruppe K^1/N^1 gehören. Den Zusammenhang zwischen (6) und (10) stellt die isomorphe Abbildung

$$m_x \to m_x^1$$

her. Daneben folgt hieraus: *Wenn die Fixgruppen U_i $(i \in I)$*, wie in Beispiel 3, *verschieden sind, so sind die monomialen Darstellungen $x \to \mathfrak{x}^*$ und $x \to m_x^1$ äquivalent* (was natürlich jetzt auch aus einem bekannten Satz der Theorie der monomialen Darstellungen [*10*, p. 128] gefolgert werden kann), *und der explizite Zusammenhang beider Darstellungen wird durch den Isomorphismus $m_x^1 \to m_x \to \mathfrak{x}^*$ gegeben.*

Literatur

[*1*] FRUCHT, R.: Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes. Rev. Unión Matem. Argentina **8**, 42—69 (1942).

[*2*] HOEHNKE, H.-J.: Zur Theorie der Gruppoide I, II. Math. Nachr. 1961/2 (im Druck).

[*3*] LOEWY, A.: Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen. J. reine angew. Math. **157**, 239—254 (1927).

[*4*] NEUMANN, B.: Die Automorphismengruppe der freien Gruppen. Math. Ann. **107**, 367—386 (1932).

[*5*] ORE, O.: Theory of monomial groups. Trans. Amer. Math. Soc. **51**, 15—64 (1942).

[*6*] OSIMA, M.: On the representations of the generalized symmetric group, I; II. Math. J. Okayama Univ. **4**, 39—56 (1954); **6**, 81—97 (1956).

[*7*] PÓLYA, G.: Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta math. Uppsala **68**, 145—254 (1937).

[*8*] SCHMIDT, F. K.: Bemerkungen zum Brandtschen Gruppoid. Sitzungsber. Heidelberg **1927**, 8. Abh., 91—103.

[*9*] SPECHT, W.: Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe. Schriften Mathem. Sem. u. Inst. Angew. Math. Univ. Berlin **1**, H. 1, 1—32 (1932).

[*10*] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. Leipzig 1937.

Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin,
Institut für Reine Mathematik

(Eingegangen am 16. März 1961)

Haupt, O.
Math. Zeitschr. 77, 81–93 (1961)

Ordnungsgeometrische Limessätze in kompakten Räumen

I. Mitteilung: Komponentenordnungswerte

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22.9.1961 gewidmet

Von

Otto Haupt

Einleitung

Bekannt ist (vgl. [1][1]): Im euklidischen E_n, $n \geqq 2$, besitzt der Limes C einer Folge von (gleichmäßig beschränkten) Kontinuen C_n, deren schwache (Komponenten- bzw. Punkt-) Ordnungswerte den endlichen unteren Limes m besitzen, selbst einen schwachen (Komponenten- bzw. Punkt-) Ordnungswert $\leqq m$; Ordnungscharakteristiken sind dabei die Hyperebenen des E_n. Diese Limessätze gelten allgemeiner in metrischen kompakten Räumen R (denen sich der E_n als Spezialfall einordnet) und zwar bezüglich gewisser Systeme von abgeschlossenen Mengen K als Ordnungscharakteristiken, die ziemlich willkürlich wählbar sind, insofern nämlich an die K verhältnismäßig geringe Anforderungen gestellt werden; diese laufen im wesentlichen darauf hinaus, daß R durch eine solche Ordnungscharakteristik K in zwei fremde offene Teile gespalten wird und daß gewisse Paare von Punkten aus R durch geeignet gewählte K sich trennen lassen.

Nachstehend soll diese Verallgemeinerung für den Fall zunächst des *Komponenten*ordnungswertes bewiesen werden; und zwar nicht nur für Verallgemeinerungen R des E_n, sondern, etwas weitergehend, für kompakte metrische Räume P, denen sich der projektive Raum P_n einordnet. Dabei wird jeder Raum P durch Wegnahme einer Ordnungscharakteristik zu einem Raum R. Die von den Ordnungscharakteristiken zu fordernden „Trennungseigenschaften" können noch in verschiedener Weise formuliert werden; dies führt zu zwei Limessätzen. Diese beiden Limessätze ergänzen sich gegenseitig; der erste (§3) entspricht nämlich — grob gesprochen — etwa dem Fall, daß im P_n das System $\mathfrak{k}$ der Ordnungscharakteristiken keine Büschel von Hyperebenen enthält (oder doch nicht zu enthalten braucht), während sich der zweite (§4) für den Spezialfall des P_n gerade auf den Fall bezieht, daß in $\mathfrak{k}$ (mindestens) ein Büschel vorhanden ist.

In den Limessätzen kann im allgemeinen die Voraussetzung nicht entbehrt werden, sowohl daß es sich um *schwache* Ordnungswerte handelt als auch daß der untere Limes der Ordnungswerte der C_n endlich ist (vgl. [2], Nr. 1.4., Anmerkung (1) und (2)).

[1]) Ziffern in eckiger Klammer im Text verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Note.

Der Fall des schwachen *Punkt*ordnungswertes ist einer weiteren Mitteilung vorbehalten. Der erste Limessatz für Räume R wurde in [2] angezeigt. Dort ist auch der Zusammenhang mit dem Blaschkeschen Satz über (konvergente) Folgen konvexer Körper besprochen und die Fragestellung durch verschiedene Beispiele erläutert.

§ 1. Grundraum P und Ordnungscharakteristiken K

1.1. Der *Grundraum* P, in welchem sich sämtliche Betrachtungen abspielen, sei ein metrischer (in sich) kompakter Raum. Mit $U_p(M;\varepsilon)$ sei die ε-Umgebung einer Menge $M \subset P$ bezeichnet. Der Raum $\mathfrak{a}$ der Kompakta in P ist selbst metrisch und kompakt, wenn als Entfernung von $A', A'' \in \mathfrak{a}$ erklärt wird $\inf\left(\varepsilon; A'' \subset U_p(A';\varepsilon), A' \subset U_p(A'';\varepsilon)\right)$ (vgl. z.B. [4], Nr. 6.3.4.4., Satz 2); die ε-Umgebung von A in $\mathfrak{a}$ bezeichnen wir mit $U_{\mathfrak{a}}(A;\varepsilon)$. Zur Unterscheidung nennen wir ein $U_p(A;\varepsilon)$ bzw. $U_{\mathfrak{a}}(A;\varepsilon)$ auch eine p- bzw. $\mathfrak{a}$-*Umgebung* von A. Zu jeder p-Umgebung V von $A \in \mathfrak{a}$ gehören $\mathfrak{a}$-Umgebungen U von A derart, daß aus $A' \in U$ folgt $A' \subset V$. Im Sinne der Metrik in P bzw. in $\mathfrak{a}$ oder also der p- bzw. $\mathfrak{a}$-Umgebungen ist der Ausdruck „*benachbart* in P bzw. in $\mathfrak{a}$" oder „p- bzw. $\mathfrak{a}$-benachbart" zu verstehen.

1.2. *Axiome betr. Grundraum und Ordnungscharakteristiken.*

Als System $\mathfrak{k}$ von *Ordnungscharakteristiken*, abgekürzt: OCh, bezeichnen wir jedes Teilsystem von $\mathfrak{a}$, das folgende Bedingungen erfüllt:

($\mathfrak{k}$) Kein $K \in \mathfrak{k}$ ist Teilmenge eines von K verschiedenen $K' \in \mathfrak{k}$, insbesondere ist $K \neq \emptyset$ für jedes $K \in \mathfrak{k}$. Zu jedem Punkt $x \in P$ existiert (mindestens) eine OCh K mit $x \in \mathsf{C}(K) = P - K$.

Für den durch eine beliebige OCh K_0 bestimmten (offenen) Unterraum $R_0 = \mathsf{C}(K_0)$ von P soll gelten:

(Sp) *Spaltbarkeit von R_0 durch die OCh:* Bei beliebigem $K \subset \mathfrak{k}$ ist $R_0 - K = R_0(K;+) \cup R_0(K;-)$ eine Spaltung in die beiden nicht leeren, offenen, fremden Mengen $R_0(K;+)$ und $R_0(K;-)$, die beiden sog. *Seiten von K in R_0* $(K \neq K_0)$.

(St) *Stetigkeit der Seiten von K in R_0*: Für jede (hinreichend, aber) beliebig kleine p-Umgebung V von K in P gilt bei passender Wahl von $\pm$ in $R_0(K';\pm)$ für beliebiges $K' \in \mathfrak{k}$ mit $K' \subset V$:

$$R_0(K';+) \cap \mathsf{C}(V) = R_0(K;+) \cap \mathsf{C}(V) \neq \emptyset$$

und

$$R_0(K';-) \cap \mathsf{C}(V) = R_0(K;-) \cap \mathsf{C}(V).$$

Mit $R_0(K;+)$ bzw. $R_0(K;-)$ ist vermöge dieser Stetigkeit also auch $R_0(K';+)$ bzw. $R_0(K';-)$ festgelegt.

(Tr) *Trennungseigenschaften der Ordnungscharakteristiken:* Es sei $K \in \mathfrak{k} - \{K_0\}$ und $x', x'' \in \mathsf{C}(K_0) \cap K$ mit $x' \neq x''$ sowie $y', y'' \in \mathsf{C}(K_0) \cap \mathsf{C}(K)$, wobei auch $y' = y''$ zugelassen ist. In beliebig kleiner p-Umgebung V von K gibt es $K' \in \mathfrak{k}$ derart, daß auf verschiedenen Seiten von K' in $\mathsf{C}(K_0)$ gelegen sind: Entweder (I) x' und x'' oder (II) x' und y' oder (III) x' und y' sowie gleichzeitig x'' und y''.

Beispiel. (1) Es ist P der projektive n-dimensionale P_n, ferner $\mathfrak{k}$ das System der Hyperebenen in P_n, also $\mathsf{C}(K_0)$ affiner Unterraum von P_n. — (2) Die n-dimensionale Sphäre mit den $(n-1)$-dimensionalen, in ihr enthaltenen Sphären als OCh ist ein den Axiomen (f), (Sp), (St) und (Tr) genügender Raum R_0.

1.2.1. Folgerungen.

(0) Es ist P mehrpunktig.

(1) Zu beliebigen $x', x'' \in \mathsf{C}(K_0) \cap K$ und $y' \in R_0(K;+)$, $x' \neq x''$, existieren $K' \subset \mathfrak{k}$, welche zu K beliebig $\mathfrak{a}$-benachbart sind und für welche gilt: $x' \in R_0(K\ ;\ -)$ und $x'', y' \in R_0(K';+)$, wobei $R_0 = \mathsf{C}(K_0)$.

(2) Ist $x \subset P - K$ (gemäß Axiom (f)), so ist auch $x \subset P - K''$ für jedes zu K hinreichend $\mathfrak{a}$-benachbarte $K'' \subset \mathfrak{k}$. Besitzt $K' \subset \mathfrak{k}$ eine der in Axiom (Tr) genannten Eigenschaften (I) — (III), so gilt dies auch für jedes zu K' hinreichend $\mathfrak{a}$-benachbarte $K'' \in \mathfrak{k}$. Entsprechend für (1).

(3) Gelten die Axiome (f), (Sp), (St), (Tr) (in Nr. 1.2.) für $\mathfrak{k}$, so auch für $\mathfrak{k} - \mathfrak{n}$, wenn $\mathfrak{n}$ $\mathfrak{k}$ nirgends dicht in $\mathfrak{k}$ ist. Ferner folgt aus der Giltigkeit der (keine Existenzforderungen enthaltenden) Axiome (Sp) und (St) für $\mathfrak{k}$, ihre Giltigkeit für jede Teilmenge von $\mathfrak{k}$.

1.3. Es heiße $M \subset P$ nicht beschränkt, wenn $\overline{M} \cap K \neq \emptyset$ für jedes $K \in \mathfrak{k}$. Existiert ein $K_0 \subset \mathfrak{k}$ mit $\overline{M} \cap K_0 = 0$, so heiße M *beschränkt bezüglich* K_0 oder auch lediglich beschränkt.

Jedes (bezüglich K_0) beschränkte M besitzt (bezüglich K_0) beschränkte $\mathfrak{p}$-Umgebungen. Ist M beschränkt bezüglich K_0, so auch bezüglich eines jeden, zu K_0 hinreichend $\mathfrak{a}$-benachbarten $K \in \mathfrak{k}$.

Ist M beschränkt bezüglich K_0, so bezeichnen wir $M \cap R_0(K;\pm)$ als *Seiten von K in M* (bezüglich $R_0 = \mathsf{C}(K_0) = P - K_0$). Die Seiten von K in M ändern sich stetig mit K (im Sinne von Nr. 1.2., (St)); auch gilt in M das Axiom Nr. 1.2., (Tr).

Jede endliche Menge ist beschränkt (besitzt also auch beschränkte Umgebungen). (Bew. durch Induktion.)

§ 2. Ein Hilfssatz

2.1. Unter einem *Kontinuum C in P* wird verstanden jede nicht leere, zusammenhängende, abgeschlossene Teilmenge von P und unter einem Kontinuum *in* $R_0 = P - K_0$ ein bezüglich K_0 beschränktes Kontinuum. Zu den Kontinuen zählen wir also auch die einpunktigen Mengen.

2.2. Unter einem *Stück* T einer Menge $M \subset P$ wird verstanden eine nicht leere, in M abgeschlossene Teilmenge von M, deren Komplement bezüglich M ebenfalls abgeschlossen in M ist; der Fall $T = M$ wird zugelassen. Jedes Stück T von M besitzt $\mathfrak{p}$-Umgebungen (in M) mit zu $M - T$ fremder abgeschlossener Hülle; solche Umgebungen von T werden als *Normalumgebungen* N von T bezeichnet. (Solche N existieren, weil P normal ist.) In jeder beliebig kleinen $\mathfrak{p}$-Umgebung eines Stückes T von M sind Normalumgebungen bzw. die abgeschlossenen Hüllen von Normalumgebungen enthalten.

Es sei N Normalumgebung eines Stückes T von M und $N_g = \overline{N} - N$ die Begrenzung von N, ferner sei V eine $\mathfrak{p}$-Umgebung von K. Ist T beschränkt bezüglich $K_0 \in \mathfrak{k}$ und ist $R_0 = P - K_0$, *ist ferner* $T < K \in \mathfrak{k}$, so sollen $N_g \cap \mathbf{C}(V) \cap R_0(K; \pm)$ die beiden *Deckel* von N *bezüglich* V heißen; für hinreichend kleines V bei gegebenem N ist keiner der beiden Deckel von N leer.

Eine *Spaltung* von M in n Stücke T_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, $n \geqq 1$, liegt (definitionsgemäß) dann vor, wenn die T_ν sämtlich nicht leer, abgeschlossen in M, paarweise fremd und wenn ihre Vereinigung gleich M ist $M = \bigcup_\nu T_\nu$. (Daß jedes T_ν in der Tat ein Stück von M ist, folgt aus $T_\nu \cap (\bigcup_{\varrho \neq \nu} T_\varrho) = \emptyset$.)

2.3. Es sei C ein Kontinuum in P, ferner $K \in \mathfrak{k}$ und $C \cap K = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ eine Spaltung von $C \cap K$. Es existieren Normalumgebungen N_ν von T_ν mit $\overline{N}_\nu \cap \overline{N}_\varrho = \emptyset$ für $\nu \neq \varrho$, so daß $T_\nu = C \cap N_\nu \cap K$, $\nu = 1, \ldots, n$; $n \geqq 1$. Es gilt:

(1) Für jede zur OCh K hinreichend benachbarte OCh K' wird — falls $C \cap K' \neq \emptyset$ ist — durch die nicht leeren unter den $T'_\nu = C \cap N_\nu \cap K'$ eine Spaltung von $C \cap K'$ geliefert. Ferner ist $C \cap (N_\nu)_g \cap V = \emptyset$ für jede hinreichend kleine $\mathfrak{p}$-Umgebung V von K.

(2) Es sei N Normalumgebung des Stückes T von $C \cap K$ und es sei $C \cap N \neq T$. Für jede hinreichend kleine Normalumgebung N' von T und jede hinreichend kleine $\mathfrak{p}$-Umgebung V von K gilt dann: Jede Komponente Q von $C \cap N'$ mündet in $\mathbf{C}(V) \cap N'_g$; insbesondere ist also $C \cap N'_g \neq \emptyset$.

(3) Ist N *beschränkte* Normalumgebung des (beschränkten) Stückes T von $C \cap K$ mit $C \cap N \neq T$, ferner N' bzw. V hinreichend kleine Normal- bzw. $\mathfrak{p}$-Umgebung von T bzw. von K, so mündet (gemäß (2)) jede zu T nicht fremde Komponente Q' von $C \cap N$ in mindestens einem der Deckel von N' bezüglich V. Mündet Q' etwa in $N_g \cap R_0(K; +) \cap \mathbf{C}(V) = D$, wobei $T < R_0 = P - K_0$, so gibt es Komponenten Q'' von $C \cap N \cap R_0(K; +)$, welche sowohl in T als in D münden.

ZUSATZ. Ist das Stück T von $C \cap N$ *Komponente* von $C \cap N$, so ist Q' in (3) eindeutig bestimmt.

Es folgen (1) aus der Kompaktheit von C und (2)—(3) aus dem Rand- bzw. dem speziellen Brückensatz (vgl. [3], Nr. 5.1.).

2.4. Für den Beweis des Hilfsatzes (Nr. 2.5.) werden zwei Konstruktionen benötigt, die wir jetzt angeben.

Zur Abkürzung bezeichnen wir ein Stück T sowie jede *Normalumgebung* N *von* T in einer Spaltung von $C \cap K$ als *schnittartig (bezüglich* C*) auf der offenen Menge* $\mathfrak{o} < \mathfrak{k}$ mit $K \in \mathfrak{o}$, wenn eine *beschränkte* zusammenhängende Teilmenge Q von $C \cap N$ (also ein $K_0 \in \mathfrak{k}$ mit $\overline{Q} < R_0 = P - K_0$) existiert, für welche gilt: Es ist $\overline{Q} \cap K' \neq \emptyset$ für jedes $K' \in \mathfrak{o}$; und es existieren überdies $x, y \in \overline{Q}$, welche auf verschiedenen Seiten von K' in R_0 liegen für jedes $K' \in \mathfrak{o}$. — Ist N schnittartig auf $\mathfrak{o}$, so auch auf jeder Teilmenge von $\mathfrak{o}$ (Erblichkeit von „schnittartig").

Die in Aussicht genommenen Konstruktionen sind die beiden folgenden:

(K 1) Es sei N Normalumgebung eines Stückes T von $C \cap K$; dabei sei $C \cap N \neq T$. Dann läßt sich eine zu K beliebig benachbarte offene Menge

$\mathfrak{v} \subset \mathfrak{k}$ angeben, auf welcher N schnittartig ist. Genauer: Es gibt zu jedem $x \in T$ und zu jeder beschränkten p-Umgebung V von x mit $\overline{V} \subset N$ eine in x und in einem $y \in V_g$ mündende Komponente Q von $C \cap (V - \{x\})$ sowie ein zu K beliebig $\mathfrak{a}$-benachbartes offenes $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(x; V; y) \subset \mathfrak{k}$ derart, daß x und y auf verschiedenen Seiten (in $\overline{V}$) eines jeden $K' \in \mathfrak{v}$ liegen.

Zusatz. Die Beh. in (K 1) gilt auch dann, wenn zwar $T = C \cap N (= C)$, aber T mehrpunktig ist.

Bew. Es sei $x \in T$ beliebig und V eine beschränkte p-Umgebung von x mit $\overline{V} \subset N$ (gemäß Nr. 1.3. existieren solche beschränkte V). Wegen $T \neq C \cap N$ kann (gemäß Nr. 2.3., (2)) und soll (o.B.d.A.) N als so klein angenommen werden, daß $C \cap N_g \neq 0$ ist. Dann gibt es, weil auch $\overline{V} \subset N$ und $x \in C \cap V$ ist, eine Komponente Q von $C \cap (V - \{x\}) = C - C \cap \mathsf{C}(V) - \{x\}$, welche die abgeschlossenen, fremden Teilmengen $\{x\}$ und $C \cap \mathsf{C}(V)$ des Kontinuums C verbindet, also in x und in V_g mündet. (Folgt aus dem speziellen Brückensatz; vgl. [3], Nr. 5.1. (S. 118).) Man setze $D = \overline{Q} \cap V_g \cap \mathsf{C}(K)$ und unterscheide die Fälle $D \neq 0$ und $D = 0$. Ist $D \neq 0$, so existiert ein $y \in D$ etwa mit $y \in R_0(K; +) \cap V_g$, wobei $\overline{V} \subset R_0$; wegen $x = y$ gibt es dann gemäß Nr. 1.2., (Tr) (II), ein zu K beliebig $\mathfrak{a}$-benachbartes $K' \in \mathfrak{k}$ mit $x \in R_0(K'; -)$ und $y \in R_0(K'; +)$. Ist hingegen $D = \emptyset$, so existiert ein $y \in \overline{Q} \cap V_g \cap K$, wobei $x \neq y$. Gemäß Nr. 1.2., (Tr) (I), gibt es $K' \in \mathfrak{k}$, die zu K beliebig $\mathfrak{a}$-benachbart sind und für die $x \in R_0(K'; -)$ sowie $y \in R_0(K'; -)$. — Weil $\overline{Q}$ zusammenhängend und Teilmenge von C ist, gilt $\overline{Q} \cap K' \neq 0$ und sodann (vgl. Nr. 1.2.1., (2)) $\overline{Q} \cap K'' \neq \emptyset$ für alle $K'' \in \mathfrak{v}$, wenn $\mathfrak{v}$ eine hinreichend kleine $\mathfrak{a}$-Umgebung von K' ist. — *Betr. Zusatz.* Ist allgemein T' eine mehrpunktige Komponente des Stückes T, ferner $x \in T'$, so ist $T' \cap V = T'$ für jede hinreichend kleine p-Umgebung V von x. Es existiert (zufolge des speziellen Brückensatzes) eine in einem $y \in T' \cap V_g \subset K$ und in x mündende Komponente Q von $C \cap (V - \{x\})$ (vgl. die Schlüsse im Fall $D = 0$), woraus wegen $x \neq y$ und $x, y \in K$ wieder die Beh. (des Zusatzes) folgt.

(K 2) Es sei T_i ein Stück von $C \cap K$ und N_i Normalumgebung von T_i, wobei $i = 1, 2$, und $\overline{N_1} \cap \overline{N_2} = \emptyset$ (weil C zusammenhängend und $T_i \neq \emptyset$ ist, gilt $C \cap (N_i)_g \neq \emptyset$, also $C \cap N_i \neq T_i$, $i = 1, 2$). Dann gibt es eine zu K beliebig $\mathfrak{a}$-benachbarte offene Menge $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{k}$ derart, daß entweder (Fall (A)) die N_1 und N_2 beide schnittartig auf $\mathfrak{v}$ sind; oder (Fall (B)) nur N_1 schnittartig auf $\mathfrak{v}$ ist, während $C \cap N_2 \cap K' = \emptyset$ ist für jedes $K' \in \mathfrak{v}$. — Der Fall (B) kann nur eintreten, wenn jedes der N_i beschränkt, hingegen $S = N_1 \cup N_2$ nicht beschränkt ist.

Bew. (1) Ist S, also auch N_i beschränkt, $i = 1, 2$, so liegt der Fall (A) vor. In der Tat: Wegen der Beschränktheit von S gibt es ein $K_0 \in \mathfrak{k}$, so daß bezüglich $R_0 = P - K_0$ in S, also in N_1 und N_2, für jedes $K' \in \mathfrak{k}$ mit $N_i \cap K' \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, die beiden Seiten $R_0(K'; \pm)$ bestimmt sind (vgl. Nr. 1.3.). Gemäß Nr. 2.3., (3), gibt es daher zu T_i ein $\alpha_i = \pm$ bzw. ein $R_i = R_0(K; \alpha_i)$, $i = 1, 2$, derart, daß eine Komponente Q_i von $C \cap N_i \cap R_i$ in $D_i = (N_i)_g \cap R_i$ und in T_i mündet. Zu beliebigem $x_i \in \overline{Q}_i \cap T_i$ und $y_i \in \overline{Q}_i \cap D_i$ gibt es nun gemäß Nr. 1.2., (Tr) (III), ein $K' \in \mathfrak{k}$, beliebig $\mathfrak{a}$-benachbart zu K, mit etwa $x_1, y_2 \in R_0(K'; -)$

und $x_2, y_1 \in R_0(K'; +)$ bzw. mit $x_1, x_2 \in R_0(K'; -)$ und $y_1, y_2 \in R_0(K'; +)$, je nachdem $\alpha_1 \neq \alpha_2$ mit etwa $\alpha_1 = +$, bzw. $\alpha_1 = \alpha_2$ mit etwa $\alpha_1 = +$, ist. Weil $\overline{Q}_i$ zusammenhängend ist, gilt $\overline{Q}_i \cap N_i \cap K'' \neq \emptyset$ für $K'' = K'$ und für jedes K'' aus einer geeignet gewählten $\mathfrak{a}$-Umgebung $\mathfrak{v}'$ von K'. Somit sind die N_i beide schnittartig auf $\mathfrak{v}'$.

(2) Ist N_1 beschränkt oder nicht beschränkt, hingegen N_2 nicht beschränkt, so konstruiert man zunächst (gemäß (K1)) ein in $\mathfrak{k}$ offenes $\mathfrak{v}_1$, auf dem N_1 schnittartig ist. Da nun N_2 nicht beschränkt ist, gilt jedenfalls $C \cap N_2 \cap K \neq \emptyset$ für jedes $K \in \mathfrak{v}_1$ (weil für jedes $K \in \mathfrak{k}$). Somit kann in $\mathfrak{v}_1$ auf N_2 die Konstruktion (K1) angewandt und ein $\mathfrak{v}_2 < \mathfrak{v}_1$ gefunden werden, auf welchem N_2 und auch N_1 schnittartig ist. Mithin liegt wieder der Fall (A) vor.

(3) Sind die N_i beide beschränkt, während $S = N_1 \cup N_2$ nicht beschränkt ist, so kann entweder der Fall (A) oder (B) eintreten. Man konstruiere nämlich zunächst gemäß (K1) ein (in $\mathfrak{k}$ offenes) $\mathfrak{v}_1$, auf welchem N_1 schnittartig wird. Existiert ein $K \in \mathfrak{v}_1$ mit $C \cap N_2 \cap K \neq \emptyset$, so kann man durch Anwendung von (K1) auf N_2 wieder ein $\mathfrak{v}_2 < \mathfrak{v}_1$ finden, auf welchem N_2 (und N_1) schnittartig ist. Ist hingegen $C \cap N_2 \cap K = \emptyset$ für jedes $K \in \mathfrak{v}_1$, so liegt definitionsgemäß der Fall (B) vor.

2.5. Mit Hilfe der in Nr. 2.4. angegebenen Konstruktionen läßt sich beweisen der

HILFSSATZ. Vor. *Für P und $\mathfrak{k}$ seien die Axiome in* Nr. (1.1. *und*) 1.2. *erfüllt. Ferner sei C ein mehrpunktiges Kontinuum in P. Schließlich sei m eine ganze Zahl mit $m \geqq 1$.*

Beh. *Folgende drei Aussagen sind gleichwertig:*

(α) *Die Menge $\mathfrak{d}$ derjenigen $K \in \mathfrak{k}$, für welche $C \cap K$ in (mindestens) m Stücke spaltbar ist, liegt dicht in einer nicht leeren Menge $\mathfrak{v} < \mathfrak{k}$, die offen in $\mathfrak{k}$ ist (es ist also $\mathfrak{d} < \mathfrak{v}$).*

(β) *Es existiert eine (nicht leere) in $\mathfrak{k}$ offene Menge $\mathfrak{v}' < \mathfrak{k}$ derart, daß $C \cap K'$ in (mindestens) m Stücke spaltbar ist für jedes $K' \in \mathfrak{v}'$.*

(γ) *Es existiert eine (nicht leere) in $\mathfrak{k}$ offene Menge $\mathfrak{v}'' < \mathfrak{k}$ derart, daß $C \cap K$ für jedes $K \in \mathfrak{v}''$ in (mindestens) m Stücke $C \cap N_\mu \cap K$, $\mu = 1, \ldots, m$, spaltbar ist mit für alle K festen Normalumgebungen N_μ und daß jedes dieser N_μ schnittartig ist auf $\mathfrak{v}''$.*

ZUSATZ. Ist C einpunktig, so ist schwKOW $(C; \mathfrak{k}) = 0$. Umgekehrt folgt aus schwKOW $(C; \mathfrak{k}) = 0$, daß C einpunktig ist, es sei denn KOW $(C; \mathfrak{k}) = 0$. Demgemäß ist im Hilfssatz $m \geqq 1$ angenommen und (o.B.d.A.) C als mehrpunktig vorausgesetzt (vgl. Nr. 3.1).

BEW. Daß (β) aus (γ) und daß (α) aus (β) folgt, ist klar. Es genügt demnach, zu zeigen: *Aus* (α) *folgt* (γ).

(1) *Vorbemerkung.* Es sei $K \in \mathfrak{d}$ gewählt, so daß (gemäß (α)) eine *m-Spaltung* $C \cap K = \bigcup_{\mu=1}^{m} C \cap N_\mu \cap K$ existiert, wobei also N_μ Normalumgebung des Stückes $T_\mu = C \cap N_\mu \cap K$ und $\overline{N}_\mu \cap \overline{N}_\nu = \emptyset$ für $\mu \neq \nu$ ist sowie $T_\mu \neq 0$, $\mu = 1, \ldots, m$.

Durch eine m-Spaltung von $C \cap K$ werden zugleich für jedes m' mit $1 \leqq m' \leqq m$ auch m'-Spaltungen bestimmt. (Man erhält eine solche m'-Spaltung etwa durch Vereinigung von $m - m' + 1$ der T_μ bzw. N_μ zu einem (einzigen) Stück bzw. zu einer Normalumgebung dieses neuen Stückes und Beibehaltung der übrigen T_μ bzw. N_μ der ursprünglichen m-Spaltung.) Insbesondere kann also jede m-Spaltung als aus einer $(m-1)$-Spaltung hervorgegangen angenommen werden (falls $m \geqq 2$).

(2) Wir konstruieren nun, wenn (α) gilt, vermöge vollständiger Induktion nach m' und ausgehend von $m' = 1$ eine m-Spaltung bzw. ein $\mathfrak{o}''$ von der in (γ) behaupteten Art. — Ausgangspunkt ist also die 1-Spaltung $C \cap K = C \cap N \cap K \neq \emptyset$, wobei $K \in \mathfrak{o}$ und N Normalumgebung von C. Es gibt $K \in \mathfrak{o}$ mit $C \cap K \neq \emptyset$; z.B. ist dies für jedes $K \in \mathfrak{d}$ der Fall. Auf N wird zunächst (K 1) angewandt, wobei zu beachten ist: Im Falle $C \cap N = C$ für beliebig kleines N ist $C = C \cap N \cap K$ eine Komponente T von der im Zusatz zu (K 1) angegebenen Art, weil C als mehrpunktig vorausgesetzt wurde. Die Konstruktion (K 1) liefert also (in jedem Fall) eine offene Teilmenge $\mathfrak{o}_1$ von $\mathfrak{o}$, für welche (γ) mit $m' = 1$ (statt mit m) gilt. Wir machen (falls $m > 1$) die Induktionsannahme, es sei schon für ein $q - 1$ mit $1 \leqq q - 1 < m$ eine in $\mathfrak{k}$ offene (nicht leere) Menge $\mathfrak{o}_{q-1} \subset \mathfrak{o}_1$ konstruiert derart, daß jedes $K' \in \mathfrak{o}_{q-1}$ eine $(q-1)$-Spaltung (im Sinne von (γ))

$$(S') \qquad C \cap K' = \bigcup_{\nu=1}^{q-1} C \cap N'_\nu \cap K'$$

liefert, wobei also jedes N'_ν von K' unabhängig und schnittartig ist. Wegen $\mathfrak{o}_{q-1} \subset \mathfrak{o}_1 \subset \mathfrak{o}$ ist $\mathfrak{d}$ dicht in $\mathfrak{o}_{q-1}$; es existieren daher $K' \in \mathfrak{o}_{q-1} \cap \mathfrak{d}$. Gemäß (α) liefert aber jedes solche K' eine m-, also (vgl. Ziff. (1)) eine q-Spaltung

$$(S) \qquad C \cap K' = \bigcup_{\mu=1}^{q} C \cap N_\mu \cap K'.$$

Entsprechend der Definition der Spaltung ist keines der Stücke $T'_\nu = C \cap N'_\nu \cap K'$ und $T_\mu = C \cap N_\mu \cap K'$ leer. Da ferner $q - 1 < q \leqq m$ ist und da die N'_ν für jedes $K' \in \mathfrak{o}_{q-1}$ die gleichen sind, ist jedes T_μ, $1 \leqq \mu \leqq q$ in genau einem T'_ν, $1 \leqq \nu \leqq q - 1$ enthalten. Und umgekehrt ist in jedem T'_ν (mindestens) ein T_μ enthalten. Also in genau einem T'_ν, etwa in T'_1 sind genau zwei der T_μ, etwa T_1 und T_2, enthalten, hingegen in jedem der übrigen T'_ν, also in T'_ν mit $2 \leqq \nu \leqq q - 1$, genau ein T_μ, etwa $T_{\nu+1}$ (sofern $q \geqq 3$); insbesondere ist somit $T_{\nu+1} = T'_\nu$, $2 \leqq \nu \leqq q - 1$. Daher sind $N_1 \cap N'_1 \subset N'_1$ und $N_2 \cap N'_1 \subset N'_1$ sowie $N_{\nu+1} \cap N'_\nu$ ebenfalls Normalumgebungen der T_1, T_2, $T_{\nu+1}$, so daß o.B.d.A. $N_1 \cup N_2 \subset N'_1$ und $N_{\nu+1} = N'_\nu$ angenommen werden kann.

(3) Bezüglich (S') und (S) sind nun die beiden Fälle zu unterscheiden:

(3.I.) *Fall* (A). Es liegt für N_1 und N_2 der Fall (A) für (K 2) vor. Wendet man auf N_1, N_2 diese Konstruktion (K 2) an, so erhält man eine offene Teilmenge $\mathfrak{o}''$ von $\mathfrak{o}_{q-1}$, auf welcher N_1 und N_2 schnittartig sind. Ist $q = 2$, so haben wir in (S) auf $\mathfrak{o}''$ eine q-Spaltung von der in (γ) behaupteten Art. Dies gilt aber auch für $q \geqq 3$. Da nämlich die N'_ν schnittartig auf $\mathfrak{o}_{q-1}$, also auch auf $\mathfrak{o}''$, sind und da $N_{\nu+1} = N'_\nu$ für $2 \leqq \nu \leqq q - 1$ ist, sind die $N_3, \ldots, N_q$ schnittartig auf $\mathfrak{o}''$. Im Fall (A) ist damit die für (γ) gewünschte q-Spaltung konstruiert.

(3.II.) *Fall* (B). Es liegt für N_1, N_2 der Fall (B) in (K 2) vor; es sind also N_1, N_2 beschränkt, hingegen ist N_1' nicht beschränkt. Hier gibt die Konstruktion (K 2), welche wir auf N_1, N_2 anwenden, nur wieder eine $(q-1)$-Spaltung

$$(S'') \qquad C \cap K'' = \cup_{\nu=1}^{q-1} C \cap N_\nu'' \cap K''$$

mit lauter, auf einer offenen Menge $\mathfrak{o}_{q-1}' < \mathfrak{o}_{q-1}$ schnittartigen N_ν'', wobei $N_1'' = N_1$ und $N_\varrho'' = N_\varrho'$, $\varrho = 2, \ldots, q-1$, gesetzt werden kann. Es ist aber die Anzahl der beschränkten N_ν'' um 1 größer als die der beschränkten N_ν'; denn das beschränkte N_1'' ist an Stelle des nicht beschränkten N_1' getreten, während N_ν'' zugleich mit N_ν', $\nu = 2, \ldots, q-1$, beschränkt oder nicht beschränkt ist. Wendet man nun auf (S'') die gleichen Schlüsse an wie auf (S') und tritt dabei der Fall (A) auf, so wird eine q-Spaltung gemäß (γ) erhalten. Tritt aber der Fall (B) auf, so erhält man aus (S''), welches etwa i'' beschränkte Normalumgebungen aufweist, eine $(q-1)$-Spaltung (S''') mit $i''-1$ beschränkten Normalumgebungen. Man gelangt somit nach höchstens $q-1$ Schritten, wenn nicht zu einer q-Spaltung gemäß (γ), dann zu einem $K''' \in \mathfrak{d}$ der folgenden Art: Durch K''' wird geliefert 1. eine $(q-1)$-Spaltung (S''') mit lauter beschränkten, schnittartigen zugehörigen Normalumgebungen N_ν''' sowie 2. eine q-Spaltung (S). Die in Ziff. (2) angegebenen Schlüsse, angewandt auf (S''') und (S) zeigen, daß jetzt der Fall (A) in Ziff. (3.I.) vorliegt. Damit ist die Beh. auch für den Fall (3.II.) bewiesen.

§ 3. Erster Limessatz

3.1. Zwecks einfacher Formulierung des jetzt zu beweisenden Limessatzes führen wir folgende Bezeichnungen ein. Es sei M eine Menge in P und $\mathfrak{a}'$ eine Teilmenge von $\mathfrak{a}$ (vgl. Nr. 1.1.). Mit $\mathrm{KOW}(M \cap A')$ für $A' \in \mathfrak{a}'$ und als *Komponentenordnungswert* von $M \cap A'$ werde die (ev. auch unendliche) Anzahl (Kardinalzahl) der Komponenten von $M \cap A'$ bezeichnet. Existiert eine natürliche Zahl m mit $\mathrm{KOW}(M \cap A') \leqq m$ für jedes $A' \in \mathfrak{a}'$ und tritt das Gleichheitszeichen für mindestens ein $A' \in \mathfrak{a}'$ ein, so heiße M vom *(beschränkten)* Komponentenordnungswert $m = \mathrm{KOW}(M; \mathfrak{a}')$ (bezüglich $\mathfrak{a}'$). Existiert weiter eine kleinste natürliche Zahl m' derart, daß die Menge $\mathfrak{n}(m')$ derjenigen $A' \in \mathfrak{a}'$, für welche $\mathrm{KOW}(M \cap A') \geqq m'+1$ nirgends dicht in $\mathfrak{a}'$ ist, so heiße M vom (beschränkten) *schwachen* Komponentenordnungswert $m' = \mathrm{schwKOW}(M; \mathfrak{a}')$.

FOLGERUNGEN. (1) Ist $\mathrm{schwKOW}(M; \mathfrak{a}') = m'$ und $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}(m')$ die in $\mathfrak{a}'$ nirgends dichte Menge derjenigen $A' \in \mathfrak{a}'$, für die $\mathrm{KOW}(M \cap A') \geqq m'+1$ ist, so gilt $\mathrm{KOW}(M; \mathfrak{a}' - \mathfrak{n}') = m'$; und es existiert eine in $\mathfrak{a}'$ offene Menge $\mathfrak{o}$, in welcher die Menge $\mathfrak{d}$ derjenigen $A' \in \mathfrak{a}'$ dicht liegt, für welche $\mathrm{KOW}(M \cap A') = m'$. — (2) Ist $\mathfrak{a}' = \mathfrak{k}$ und gelten für P bzw. $\mathfrak{k}$ die Axiome in Nr. 1.2., so besitzt die in (1) erwähnte Menge $\mathfrak{d}$ einen nicht leeren offenen Kern. (Folgt aus Nr. 2.5., Hilfssatz.)

ANMERKUNG. Der Komponentenordnungswert ist nicht monoton, d.h. der $\mathrm{KOW}(M; \mathfrak{a}')$ ist ev. größer als der $\mathrm{KOW}(M'; \mathfrak{a}')$ für eine Obermenge M'

von M. Beispiel: Es sei $\mathfrak{a}'$ das System der Ebenen im E_3, ferner M ein Rotationsring und M' dessen konvexe Hülle.

3.2. Es gilt nun der folgende

Limessatz. Vor. (1) *Für P und $\mathfrak{k}$ sollen die Axiome in* Nr. 1.2. *erfüllt sein.* — (2) *Es seien C_n, $n=1, 2, \ldots$, Kontinua in P.* — (3) *Es sei $1 \leqq m < \infty$ für $m = \lim\inf \mathrm{schwKOW}(C_n; \mathfrak{k})$.*

Beh. *Ist $C = \lim C_n$, so gilt* $\mathrm{schwKOW}(C; \mathfrak{k}) \leqq m$.

Anmerkung. (1) Der Limes von Kontinuen, also insbesondere C, ist wieder ein Kontinuum. — (2) In jeder Folge abgeschlossener Teilmengen von P ist eine konvergente Teilfolge enthalten (metrische und topologische Konvergenz stimmen in metrischen kompakten Räumen überein; vgl. z.B. [4], Nr. 6.3.4.4.). (3) Es kann $\mathrm{schwKOW}(C_n; \mathfrak{k}) = m$ für jedes n und zugleich $\mathrm{schwKOW}(C; \mathfrak{k}) < m$ sein. Beispiel: In der projektiven Ebene $E_2 = P$ seien die C_n mehrpunktige streckenfreie Konvexbogen, die gegen eine einpunktige Menge C konvergieren; es ist dann $\mathrm{schwKOW}(C_n; \mathfrak{k}) = 2$ und $\mathrm{schwKOW}(C; \mathfrak{k}) = 0$, wenn $\mathfrak{k}$ das System der Geraden in E_2 ist.

Zusatz. Der Limessatz gilt, wie eine nähere Untersuchung zeigt, auch für $m = 0$.

Bew. (1) *Vorbemerkung.* Wegen $m = \lim\inf \mathrm{schwKOW}(C_n; \mathfrak{k})$ existiert eine unendliche Teilfolge $((C_r'))$ der Folge $((C_n))$ derart, daß $\mathrm{schwKOW}(C_r'; \mathfrak{k}) = m$ für jedes r. Da gleichzeitig $C = \lim C_r'$ bleibt, genügt es, die Behauptung des Limessatzes unter Benutzung von $((C_r'))$ (statt von $((C_n))$) zu beweisen; der Einfachheit wegen schreiben wir C_n statt C_r'. Ist ferner C einpunktig, so ist, wie man zeigen kann, $\mathrm{schwKOW}(C; \mathfrak{k}) = 0 < m$ und daher die Beh. des Limessatzes richtig. Es werde demgemäß C als *mehrpunktig* angenommen.

Es sei nun $T' = C \cap N' \cap K' \neq \emptyset$ ein Stück von $C \cap K'$ mit der Normalumgebung N', wobei $K' \in \mathfrak{k}$. Wir unterscheiden: *Fall* (I). Es ist auch $C \cap \mathsf{C}(N') \neq \emptyset$ für hinreichend kleines N'. — *Fall* (II). Es ist $C \cap \mathsf{C}(N') = \emptyset$ für beliebig kleines N', also $C \cap N' = C \cap N' \cap K' = T' = C'$.

Fall (I). Es sei $x' \in T' \subset N'$. Wegen $C = \lim C_n$ gibt es $x_n \in C_n$ mit $x' = \lim x_n$. Weiter sei V eine beschränkte p-Umgebung von x' mit $\overline{V} \subset N'$. Es ist dann $C_n \cap \mathsf{C}(\overline{V}) \neq \emptyset$ sowie $C_n \cap V \neq \emptyset$ für schließlich alle n, abgekürzt: schl.a. n; denn $C \cap \mathsf{C}(N') \neq \emptyset$ und $x' \in C \cap V$ sowie $C = \lim C_n$. Weil C_n zusammenhängend ist, folgt $C_n \cap V_g \neq \emptyset$ für schl.a. n und die Existenz einer in V_g mündenden, x_n enthaltenden Komponente Q_n von $C_n \cap V$ (gemäß dem Randsatz, vgl. [3], Nr. 5.1.). Es existiert also $y_n \in \overline{Q}_n \cap V_g$; dabei kann, ev. nach Ersetzung von $((C_n))$ durch eine Teilfolge, angenommen werden, daß $y' = \lim y_n \in C \cap V_g$ existiert. Es gibt weiter eine Teilfolge $((C_r'))$ von $((C_n))$, wobei etwa $C_r' = C_{n_r}$ ist, derart, daß $\overline{Q}' = \lim \overline{Q}_r' \subset C$ existiert, wobei $Q_r' = Q_{n_r}$ ist (vgl. Anmerkung (2) und (1)). Es ist $\overline{Q}'$ Teilkontinuum von $C \cap \overline{V}$ mit $x' \in \overline{Q}' \cap T' \subset \overline{Q}' \cap V$ und $y' \in \overline{Q}' \cap V_g$. Es ist $x' \neq y'$ und entweder $y' \in V_g \cap K'$ oder $y' \in V_g \cap \mathsf{C}(K')$; je nachdem gibt es gemäß Nr. 1.2., (Tr) (I) bzw. (II), ein zu K' beliebig $\mathfrak{a}$-benachbartes $K'' \in \mathfrak{k}$, so daß x' und y' auf verschiedenen Seiten von K'' (in einer

beschränkten, $\overline{V}$ enthaltenden Menge) liegen. Gleiches gilt dann für schl.a. $x'_r = x_{n_r}$ und $y'_r = y_{n_r}$. Da $\overline{Q}'$ und $\overline{Q}'_r$ zusammenhängend sind, wird also $\overline{Q}' \cap K'' \neq \emptyset$ und $\overline{Q}'_r \cap K'' \neq \emptyset$ für $r > n'$; und dies gilt (vgl. Nr. 1.2.1.) noch für jedes $K''' \in \mathfrak{k}$ aus einer hinreichend kleinen $\mathfrak{a}$-Umgebung $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}'(K''; n')$ von K''. Somit ist N' schnittartig auf $\mathfrak{v}'$ für C und gleichzeitig für alle C'_r mit $r > n'$.

Fall (II). Es ist $C \cap N' = C \cap N' \cap K' = C'$. Man wähle ein $x' \in T' = C$ und eine beschränkte p-Umgebung V von x' derart, daß $C \cap \mathsf{C}(\overline{V}) \neq \emptyset$; solche V existieren, weil C als mehrpunktig angenommen wurde (vgl. oben Ziff. (1)) und es kann $\overline{V} \subset N'$ angenommen werden. Nun ist $C \cap V_g \neq \emptyset$ und $C_n \cap V_g \neq \emptyset$ für schl.a. n. Entsprechend wie im Fall (I) schließt man auf die Existenz von $x_n \in C_n \cap V$ mit $x' = \lim x_n$, ferner auf die von $y' = \lim y_n$ mit $y' \in C \cap V_g \subset K'$ und $y_n \in C_n \cap V_g$ sowie auf die Existenz einer Teilfolge $((C'_r))$ von $((C_n))$ und einer offenen Menge $\mathfrak{v}' \subset \mathfrak{k}$ derart, daß N' schnittartig auf $\mathfrak{v}'$ ist für C und zugleich für alle C'_r mit $r > n'$.

(2) Unter Heranziehung der Vorbemerkung (Ziff. (1)) kann der Limessatz indirekt so bewiesen werden: Es sei $\mathrm{schwKOW}(C; \mathfrak{k}) \geqq m+1 \,(\geqq 2)$; es sei mithin die Menge derjenigen $K \subset \mathfrak{k}$, für welche $C \cap K$ in $m+1$ Stücke spaltbar ist, nicht nirgends dicht in $\mathfrak{k}$, also dicht in einer offenen Teilmenge von $\mathfrak{k}$. Gemäß Nr. 2.5., Hilfssatz, existiert ein $K' \subset \mathfrak{k}$ sowie eine (nicht leere) offene Menge $\mathfrak{v}^1 \subset \mathfrak{k}$ mit $K' \in \mathfrak{v}^1$ derart, daß $C \cap K'$ eine $(m-1)$-Spaltung $C \cap K' = \bigcup_{\mu=1}^{m+1} C \cap N'_\mu \cap K'$ gestattet und daß jedes N'_μ (bezüglich C) schnittartig ist auf $\mathfrak{v}^1$, also mit den Stücken $T'_\mu = C \cap N'_\mu \cap K \neq \emptyset$ für jedes μ und jedes $K \in \mathfrak{v}^1$. Gemäß Ziff. (1) gibt es aber in beliebiger $\mathfrak{a}$-Umgebung von K', also in $\mathfrak{v}^1$, eine offene Menge $\mathfrak{v}^2$ und dazu eine Teilfolge $((C^1_r))$ von $((C_n))$ so, daß N'_1 schnittartig ist auf $\mathfrak{v}^2$ nicht nur bezüglich C, sondern auch bezüglich schl.a. C^1_r, während im übrigen die $N'_2, \ldots, N'_{m+1}$ schnittartig sind bezüglich C und zusammen mit N'_1 eine $(m+1)$-Spaltung von $C \cap K$ liefern für jedes $K \in \mathfrak{v}^2$. Wendet man auf N'_2, $\mathfrak{v}^2$ und $((C^1_r))$ die gleichen Schlüsse an wie soeben auf N'_1, $\mathfrak{v}^1$ und $((C_n))$ und setzt dieses Verfahren für $N'_3, \ldots, N'_{m-1}$ fort, so erhält man eine offene (nicht leere) Teilmenge $\mathfrak{v}^{m+1}$ von $\mathfrak{v}^1$ sowie eine Teilfolge $((C^{m-1}_r))$ von $((C_n))$ derart, daß die $N'_1, \ldots, N'_{m+1}$ auf $\mathfrak{v}^{m-1}$ eine $(m-1)$-Spaltung liefern nicht nur bezüglich C sondern auch bezüglich schl.a. C^{m+1}_r. Ein solches C^{m+1}_r ist demnach für alle $K \in \mathfrak{v}^{m+1}$ in $m+1$ Stücke spaltbar, so daß $C \cap K$ mindestens $m+1$ Komponenten besitzt; daher ist $\mathrm{schwKOW}(C^{m-1}_r; \mathfrak{k}) \geqq m+1$. Dies widerspricht der Annahme (vgl. Ziff. (1)), daß $m = \mathrm{schwKOW}(C_n; \mathfrak{k})$ für jedes n.

§ 4. Zweiter Limessatz

Der in Nr. 3.2. bewiesene Limessatz umfaßt zwar, als Spezialfall, den Fall des projektiven Raumes P_n mit dem System aller Hyperebenen als System $\mathfrak{k}$ der Ordnungscharakteristiken. Indes gilt der Limessatz im P_n auch dann, wenn $\mathfrak{k}$ etwa nur ein Büschel von Hyperebenen ist und wenn C beschränkt ist. Um auch diesen Fall zu erledigen, genügt es, das Axiom (Tr) in Nr. 1.2. durch ein anderes zu ersetzen unter gleichzeitiger Abschwächung des Axioms ($\mathfrak{k}$). Diese Abänderung des Axiomensystems wird in Nr. 4.1. vorgenommen und in Nr. 4.2. sodann der zugehörige (zweite) Limessatz bewiesen.

4.1. Wir lassen im Axiom (f) (Nr. 1.2.) die Forderung fallen, daß jede einpunktige Menge beschränkt ist, schwächen also (f) ab zum

Axiom (fs). Kein $K \in \mathfrak{f}$ ist Teilmenge eines von K verschiedenen $K' \in \mathfrak{f}$; insbesondere ist $K \neq \emptyset$ für jedes $K \in \mathfrak{f}$.

Ferner ersetzen wir das Axiom (Tr) (Nr. 1.2.) durch das

Axiom (B). Für jede beschränkte offene Menge $M \subset P$ gilt: Es sei etwa $\overline{M} \subset R_0$. Ist dann $M \cap K \neq 0$ für ein $K \in \mathfrak{f}$, so gibt es zu jedem $y \in R_0(K; \alpha)$, wobei $\alpha = \pm$, in beliebig kleiner $\mathfrak{o}$-Umgebung $\mathfrak{x}$ von K ein $K' \in \mathfrak{f}$ mit $y \in R_0(K'; \alpha)$ und mit $M \cap K \subset R_0(K'; -\alpha)$ sowie mit $\overline{M} \cap K' \subset R_0(K; \alpha)$.

Folgerung. Haben M, K, y und $\mathfrak{x}$ die gleiche Bedeutung wie in Axiom (B), so existiert eine offene Teilmenge $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{x}$ und dazu eine p-Umgebung V von K derart, daß $y \in R_0(K'; \alpha)$ sowie $\overline{M} \cap K'' \subset R_0(K'; -\alpha)$ und $\overline{M} \cap K' \subset R_0(K''; \alpha)$ für jedes $K' \in \mathfrak{v}$ und jedes $K'' \subset V$.

Anmerkung. Axiom (B) ließe sich noch etwas abschwächen, worauf aber hier nicht eingegangen wird.

4.2. Nunmehr läßt sich beweisen der

Limessatz. Vor. (1) *Es seien die Axiome* (Sp), (St) *in* Nr. 1.2. *sowie* (fs), (B) *in* Nr. 4.1. *erfüllt.* — (2) *Es sei* C_n, $n = 1, 2, \ldots$, *ein Kontinuum in* P. — (3) *Es sei* $1 \leqq m < \infty$ *für* $m = \liminf \operatorname{schwKOW}(C_n; \mathfrak{f})$.

Beh. *Ist* $C = \lim C_n$ *und ist* C *beschränkt, so gilt* $\operatorname{schwKOW}(C; \mathfrak{f}) \leqq m$.

Zusatz. (1) Für $m = 0$ gilt der Limessatz ebenfalls (wie eine nähere Untersuchung zeigt). — (2) Ist C nicht beschränkt, so gilt der Limessatz im allgemeinen nicht.

4.3. Beweis des Limessatzes in Nr. 4.2.

(I) Aus der Beschränktheit von C folgt die Beschränktheit schließlich aller (schl.a.) C_n. Ist nämlich M eine beschränkte offene Obermenge von C, so ist auch $C_n \subset M$ für schl.a. n. Es sei $\overline{M} \subset R_0$; dieses M und R_0 werden im folgenden stets beibehalten. Insbesondere liegen Normalumgebungen eines Stückes eines $C \cap K$ in M.

(II) Nachstehende Bemerkung wird später benützt.

Vor. (a) Es sei $C' \subset R_0$ ein (beschränktes) Kontinuum und $T = C' \cap N \cap K$ ein Stück von $C' \cap K$ mit der (beschränkten) Normalumgebung N. Ist $C' \cap N_g \neq \emptyset$, so existiert eine p-Umgebung V von K mit $C' \cap N_g \cap \overline{V} = \emptyset$. — (b) Es sei T seinerseits in Stücke $T_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, q$; $q \geqq 2$ spaltbar mit den Normalumgebungen $N_\varkappa$; o.B.d.A. wird dabei $\overline{N}_\varkappa \subset V$ angenommen.

Beh. Mündet eine Komponente Q von $C' \cap N$ sowohl in $N_g^+ = N_g \cap R_0(K; +)$ als in $N_g^- = N_g \cap R_0(K; -)$, so gibt es unter den $N_\varkappa$ mindestens eines, etwa N_1, derart, daß eine Komponente Q_1 von $Q \cap N_1 \subset C' \cap N_1$ sowohl in $(N_1)_g^+$ als in $(N_1)_g^-$ mündet. (Es ist also $Q_1 \cap T_1 \neq \emptyset$.)

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe des Brückensatzes (vgl. [3], Nr. 5.1.).

4.3.1. Der Beweis des Limessatzes (Nr. 4.2.) werde indirekt geführt; dabei kann o.B.d.A. $m = \text{schw}(C_n; \mathfrak{k})$ für alle n vorausgesetzt werden (vgl. Nr. 3.2., Bew. (1)).

(I) Es existiere also eine in $\mathfrak{k}$ offene Menge $\mathfrak{o}_0$ und eine in $\mathfrak{o}_0$ dichte Menge $\mathfrak{d}$ derart, daß $C \cap K$ eine $(m+1)$-Spaltung gestattet[2]) für jedes $K \in \mathfrak{d}$; es sei etwa $K' \in \mathfrak{d}$ und

$$(S) \qquad C \cap K' = \bigcup_{\mu=1}^{m+1} T_\mu < M \text{ (vgl. Nr. 4.3., (I))} \text{ mit } T_\mu = C \cap N_\mu \cap K' \neq \emptyset,$$

wobei N_μ Normalumgebung für T_μ ist. Für hinreichend kleine N_μ gilt dabei $C \cap \mathsf{C}(\overline{N}_\mu) \neq \emptyset$ und $C \cap (N_\mu)_g \neq \emptyset$ für jedes μ (weil $m+1 \geqq 2$ und C zusammenhängend ist); es ist dann ebenso $C_n \cap (N_\mu)_g \neq \emptyset$ für schließlich alle n, weil $C = \lim C_n$. Nach dem Randsatz existiert mithin für schl.a. n eine in $(N_1)_g$ mündende Komponente Q_{n1} von $C_n \cap N_1$, welche einen, zu T_1 beliebig $\mathfrak{p}$-benachbarten Punkt enthält. Daher gibt es unendlich viele $C_{n_r} = C_r^1$ unter den C_n derart, daß die zugehörigen Komponenten $Q_r^1 = Q_{n_r 1}$ bzw. ihre abgeschlossenen Hüllen $\overline{Q_r^1}$ gegen ein zu $(N_1)_g$ und T_1 nicht fremdes Kontinuum $\overline{Q}_1 < C \cap \overline{N}_1$ konvergieren; dabei können die C_r^1 noch so gewählt werden, daß die Q_r^1 alle im gleichen Deckel von N_1 münden, etwa in $(N_1)_g^+ = (N_1)_g \cap R_0(K'; +)$, und daß folglich auch $\overline{Q}_1$ nicht fremd ist zu $(N_1)_g^+$. Es gibt eine $\mathfrak{p}$-Umgebung V von K', für welche $\overline{Q_r^1} \cap (N_1)_g^+ < \mathsf{C}(\overline{V})$ und ebenso $\overline{Q}_1 \cap (N_1)_g^+ < \mathsf{C}(\overline{V})$ ist, und derart, daß (S) gilt für jedes $K \in \mathfrak{k}$ mit $K < V$ statt für K' (wobei aber $C \cap N_\mu \cap K = \emptyset$ werden kann). Gemäß Axiom (B) (Nr. 4.1.) existiert ein $K'' < V$ mit $\overline{M} \cap K'' < R_0(K'; +)$, also mit $\overline{M} \cap K' \cap K'' = 0$. Wird $N_1'' = N_1 \cap R_0(K''; +)$ gesetzt, so ist $\overline{Q}_1 \cap \mathsf{C}\big(R_0(K''; +)\big) \neq \emptyset$ und $0 \neq \overline{Q}_1 \cap (N_1'')_g^+ < \mathsf{C}(\overline{V})$, wobei $(N_1'')_g^+ = (N_1'')_g \cap R_0(K''; +)$; und gleiches gilt für schl.a. $\overline{Q_r^1}$. Nach dem Brückensatz existieren Komponenten von $\overline{Q}_1 \cap N_1''$ und von $\overline{Q_r^1} \cap N_1''$, welche sowohl in $\mathsf{C}\big(R_0(K''; +)\big)$ als in $(N_1'')_g^+ \cap \mathsf{C}(V)$ münden. Wir lassen diese Komponenten an Stelle der Q_1, Q_r^1 treten und bezeichnen sie ebenfalls mit Q_1, Q_r^1. Gemäß Axiom (B) (Nr. 4.1.); vgl. auch Nr. 1.2.1., (2); existiert weiter eine, zu K'' beliebig $\mathfrak{a}$-benachbarte, offene Menge $\mathfrak{o}_1 < \mathfrak{o}_0$ derart, daß für jedes $K \in \mathfrak{o}_1$ gilt: $\overline{M} \cap K'' \cap K = \emptyset$ und $\overline{M} \cap K < V \cap R_0(K''; +)$. Zufolge der Wahl von V ist überdies

$$(S') \qquad C \cap K = \bigcup_{\mu=1}^{m+1} C \cap N_\mu' \cap K,$$

wobei $N_1' = N_1''$, $N_\mu' = N_\mu$ für $2 \leqq \mu \leqq m+1$ und wobei N_1' schnittartig auf $\mathfrak{o}_1$ ist bezüglich C bzw. $\overline{Q}_1$ und schl.a. C_r^1 bzw. $\overline{Q_r^1}$.

(II) Nun kann man induktiv weiter schließen. Annahme: Für alle s mit $1 \leqq s < s' \leqq m+1$ sei schon ein offenes $\mathfrak{o}_s < \mathfrak{o}_{s-1}$ gefunden derart, daß gilt:

$$(S^s) \qquad C \cap K = \bigcup_{\mu=1}^{m+1} C \cap N_\mu^s \cap K \quad \text{für jedes } K \in \mathfrak{o}_s,$$

wobei die $N_1^s, \ldots, N_s^s$ schnittartig sind auf $\mathfrak{o}_s$ bezüglich C und unendlich vieler unter den C_n, die wir mit C_r^s bezeichnen; dabei kann $C \cap N_\mu^s \cap K = \emptyset$ sein für gewisse μ mit $s < \mu$. Es sei insbesondere $s = s' - 1$. Weil $\mathfrak{d}$ dicht in $\mathfrak{o}_s$ ist, kann K in $\mathfrak{d} \cap \mathfrak{o}_s$ gewählt und neben (S^s) die $(m+1)$-Spaltung

$$(S_s) \qquad C \cap K = \bigcup_{\mu=1}^{m+1} T_{s\mu} \quad \text{mit} \quad T_{s\mu} = C \cap N_{s\mu} \cap K \neq \emptyset$$

[2]) Insbesondere ist also C mehrpunktig.

betrachtet werden. Wählt man (o.B.d.A.) die $N_{s\mu}$ hinreichend klein, so ist in jedem der N_μ^s, $\mu = 1, \ldots, s$, mindestens ein $N_{s\mu}$ enthalten; denn jedes dieser N_μ^s ist schnittartig auf $\mathfrak{v}_s$, so daß $C \cap N_\mu^s \cap K \neq 0$. Ist in N_μ^s, $1 \leqq \mu \leqq s$, nur ein einziges $N_{s\mu}$ enthalten, so werde N_μ^s durch dieses $N_{s\mu}$ ersetzt; sind aber in N_μ^s mehrere der $N_{s\mu}$ enthalten, so wende man auf dieses N_μ^s und diese $N_{s\mu}$ die Nr. 4.3. (II), an, indem man N_μ^s bzw. $N_{s\mu}$ an die Stelle der dortigen N bzw. $N_\varkappa$ treten läßt. In jedem Falle erhält man also für jedes μ mit $1 \leqq \mu \leqq s$ ein in N_μ^s enthaltenes $N_{s\mu}$ derart, daß $N_{s\mu}$ schnittartig ist auf einer offenen K enthaltenden Teilmenge $\mathfrak{v}_{s\mu}$ von $\mathfrak{v}_s$ bezüglich C und unendlich vieler der C_r^s; auf dem (nicht leeren) Durchschnitt $\mathfrak{v}_s'$ dieser $\mathfrak{v}_{s\mu}$ sind dann s der $N_{s\mu}$, etwa $N_{s1}, \ldots, N_{ss}$ schnittartig bezüglich C und unendlich vieler der C_r^s. Wendet man die Überlegungen in Ziff. (I) auf etwa $N_{s,s-1}$ an, so ergibt sich: die $N_{s1}, \ldots, N_{s,s+1}$ sind schnittartig auf einer offenen Teilmenge $\mathfrak{v}_{s+1}$ von $\mathfrak{v}_s'$ bezüglich C und unendlich vieler der C_r^s, etwa bezüglich C_r^{s+1}. Die Induktionsannahme ist also auch bezüglich $s+1 = s'$ richtig.

(III) Nach beschränkt vielen Schritten führt der Induktionsschluß (vgl. Ziff. (II)) zu einem offenen $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{v}_0$ sowie zu einer $(m+1)$-Spaltung von $C \cap K$ (für $K \in \mathfrak{v}$), deren zugehörige Normalumgebungen sämtlich schnittartig sind auf $\mathfrak{v}$ bezüglich (C und) unendlich vieler C_r^{m-1} unter den C_n. Für jedes solche C_r^{m+1} ist folglich schwKOW $(C_r^{m+1}; \mathfrak{k}) \geq m+1$ im Widerspruch zu $m = \text{schwKOW}(C_n; \mathfrak{k})$ für jedes n.

Betr. Zusatz (2). Es seien x, y rechtwinklige, kartesische Koordinaten in der euklidischen Ebene E_2 mit dem Nullpunkt $o = (x = 0, y = 0)$. Alsdann sei P die abgeschlossene Kreisscheibe F mit o als Zentrum vom Radius 3 und $\mathfrak{k}$ das Büschel der abgeschlossenen Radien von F. Für P und $\mathfrak{k}$ sind die Axiome (Sp), (St) in Nr. 1.2. und ($\mathfrak{k}s$), (B) in Nr. 4.1. erfüllt. Jede den Punkt o enthaltende Menge ist nicht beschränkt. Wir wählen nun als C_n den durch $(x - n^{-1})^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$ mit $x \geqq n^{-1}$ erklärten (Halb-) Kreisbogen. Dann ist $C = \lim C_n$ erklärt durch $x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$ mit $x \geqq 0$. Wegen $o \in C$ ist C nicht beschränkt, während jedes C_n beschränkt ist. Weiter ist schwKOW $(C; \mathfrak{k}) = 2$, hingegen schwKOW $(C_n; \mathfrak{k}) = 1$ für jedes n. Der (zweite) Limessatz (Nr. 4.2.) gilt hier also nicht.

Literatur

[1] Haupt, O.: Limessätze bei geometrischen Ordnungen. Ann. Mat. pura appl., Ser. IV **23**, 123–148 (1944).

[2] — Über einige Probleme bei schwachen Komponenten- und Punktordnungswerten. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. 1961, 1–12.

[3] — G. Nöbeling u. Chr. V. Pauc: Sekanten und Paratingenten in topologischen Abhängigkeitsräumen. J. reine angew. Math. **182**, 105–121 (1940).

[4] — G. Aumann u. Chr. V. Pauc: Differential- und Integralrechnung, Bd. 1 (2. Aufl. Berlin 1948).

Erlangen, Spardorferstr. 45

(Eingegangen am 23. März 1961)

Wagner, R.
Math. Zeitschr. 77, 94—100 (1961)

Interne Kennzeichnung projektiver Abbildungen auf Quadriken

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

Richard Wagner

1. Bei der Beschäftigung mit der inneren Geometrie auf Quadriken stößt man auf die Frage, was unter projektiven Selbstabbildungen von Quadriken verstanden werden soll. Natürlicherweise wird man an Kollineationen des einbettenden projektiven Raumes denken, die die Quadrik fest lassen, genauer gesagt: an die von solchen Kollineationen auf der Quadrik induzierten Abbildungen. Das Problem ist dann, diese Abbildungen auf der Quadrik selbst zu kennzeichnen.

Für Kegelschnitte ist bekanntlich Doppelverhältnisinvarianz die charakteristische Eigenschaft. In höheren Dimensionen wird man sich leiten lassen von der Analogie unserer Fragestellung mit der zum Fundamentalsatz der projektiven Geometrie führenden und invariante Klassen von Punktmengen auf der Quadrik herausstellen. Die Forderung der Geradentreue ist, wenn man sie wörtlich nimmt, sicher unbrauchbar; auf einer zweidimensionalen reellen Regelquadrik etwa könnte man unter dieser Forderung noch die beiden Erzeugendenscharen je in sich beliebig permutieren. Nimmt man jedoch für „Geraden" die ebenen Schnitte der Quadrik, dann ist Geradentreue in der Tat kennzeichnend für die von Kollineationen induzierten Selbstabbildungen. Der Beweis dieses Sachverhaltes ist das Ziel der folgenden Betrachtung.

Gewisse Schwierigkeiten, die man auf den ersten Blick vielleicht nicht erwarten mag, erwachsen einmal daraus, daß wir die Geradentreue nur für die Abbildungen selbst, nicht aber für ihre Umkehrungen fordern werden, zum anderen aus der Zulassung beliebiger kommutativer Koordinatenkörper mit Charakteristik $\neq 2$. Dagegen gibt es keine neuen Komplikationen, wenn man zuläßt, daß die abzubildenden Quadriken nicht zusammenfallen, oder sogar in verschiedenen Räumen liegen.

2. Wir gehen aus von einem $(n+1)$-dimensionalen projektiven Raum P über einem kommutativen Koordinatenkörper, dessen Charakteristik nicht 2 ist; jede Gerade in P enthält dann mindestens vier Punkte. Weiter sei eine symmetrische Bilinearform in projektiven Punktkoordinaten vorgelegt. Je zwei Punkte von P, deren Koordinaten die Bilinearform annullieren, heißen *konjugiert*. Die aus der Bilinearform hervorgehende *Polarität* $\mathfrak{q}$ ordnet jedem Unterraum L von P als *Polare* den Unterraum $\mathfrak{q}(L)$ aller derjenigen Punkte

zu, die zu allen Punkten von L konjugiert sind. Falls es Punkte gibt, die zu sich selbst konjugiert sind, so bilden diese Punkte eine *n-dimensionale Quadrik* $\mathfrak{f}$ in P; wir benutzen also den klassischen Begriff einer Quadrik als Nullstellengebilde einer quadratischen Form.

Hat die zur Definition von $\mathfrak{q}$ dienende Bilinearform den höchstmöglichen Rang $n+2$, so mögen Polarität und eventuell zugehörige Quadrik *regulär* heißen. Eine reguläre Polarität ist nicht nur monoton und symmetrisch — aus $L \subset M$ folgt $\mathfrak{q}(L) \supset \mathfrak{q}(M)$, und aus $L \supset \mathfrak{q}(M)$ folgt $M \supset \mathfrak{q}(L)$ — sondern auch eineindeutig und involutorisch. Ein Unterraum und seine Polare haben komplementäre Dimensionen m und $n-m$. Diese Eigenschaften wollen wir ohne weiteres als bekannt ansehen.

Zwei weitere Feststellungen über eine reguläre n-dimensionale Quadrik $\mathfrak{f}$ mit der Polarität $\mathfrak{q}$ in P mögen noch ausdrücklich formuliert werden, weil wir darauf öfters zurückgreifen müssen; Punkte von $\mathfrak{f}$ bezeichnen wir dabei kurz als „Flächenpunkte".

(1) *G sei eine Gerade durch einen Punkt Z von $\mathfrak{f}$.*

a) Liegt G nicht in der Polaren $\mathfrak{q}(Z)$, so findet sich auf G genau ein weiterer Flächenpunkt;

b) enthält G zwei weitere Flächenpunkte, so liegt die ganze Gerade in $\mathfrak{f}$ und in $\mathfrak{q}(Z)$.

Beide Behauptungen ergeben sich unmittelbar, wenn man G durch Z und einen passenden zweiten Punkt aufspannt und die dann faktisch lineare Bedingung für Flächenpunkte auf G anschreibt.

(2) *Ist $n \geqq 2$, so gibt es in P nicht zwei Hyperebenen, die zusammen alle Punkte der Quadrik $\mathfrak{f}$ enthalten.*

Indirekter Beweis. Jeder Flächenpunkt liege in einer der beiden Hyperebenen H_1 oder H_2. Wegen (1a) kann H_2 allein nicht die ganze Quadrik aufnehmen. Es gibt also einen Flächenpunkt Z, der zu H_1, nicht aber zu H_2 gehört. Seine Polare $\mathfrak{q}(Z)$ schneidet — wie auch H_1 — aus H_2 einen $(n-1)$-dimensionalen Unterraum aus, so daß sich Punkte $Z_0, \ldots, Z_n$ finden lassen, die H_2 aufspannen, aber weder zu $\mathfrak{q}(Z)$ noch zu H_1 gehören. Verbindet man diese Punkte mit Z, so zeigt (1a), daß sie alle zu $\mathfrak{f}$ gehören. Mit jedem Z_i verfahren wir nun wie eben mit dem Punkt Z, wobei H_1 und H_2 ihre Rollen vertauschen. Da die Polaren $\mathfrak{q}(Z_i)$ nur den Punkt $\mathfrak{q}(H_2)$ gemeinsam haben, müssen alle von $\mathfrak{q}(H_2)$ verschiedenen Punkte aus H_1, die nicht zu H_2 gehören, auf der Quadrik liegen. In der Hyperebene H_1, die ja mindestens zweidimensional ist, gibt es eine Gerade, die den Punkt $\mathfrak{q}(H_2)$ meidet und H_2 nur in einem Punkte Y trifft. Dieser Punkt gehört dann nach (1b) zur Quadrik. Da schließlich sicher eine zweite Gerade durch Y existiert, die mit den drei Hyperebenen H_1, H_2 und $\mathfrak{q}(Y)$ je nur den Punkt Y gemeinsam hat, geraten wir endgültig in Widerspruch zu (1a).

Zur Ergänzung betrachten wir noch den Fall $n=1$. Der Hilfssatz (2) gilt in einer projektiven Ebene genau dann, wenn die Geraden der Ebene je mehr als vier Punkte enthalten. Die Quadrik $\mathfrak{f}$ besitzt nämlich ebensoviele Punkte wie eine Gerade, und nicht drei davon sind kollinear. Zum Aufsaugen von mehr als vier Punkten reichen demnach zwei Geraden nie aus, für höchstens vier Punkte natürlich stets.

3. Neben den Raum P stellen wir nun einen zweiten projektiven Raum P' über einem kommutativen Körper mit Charakteristik $\neq 2$; P und P' brauchen nur die Dimension $n+1$ gemeinsam zu haben. In jedem der beiden Räume sei eine reguläre n-dimensionale Quadrik $\mathfrak{f}$ bzw. $\mathfrak{f}'$ mit den Polaritäten $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{q}'$ gegeben, ferner eine eineindeutige Abbildung φ von $\mathfrak{f}$ *auf* $\mathfrak{f}'$ mit der Eigenschaft

(E) *Liegen vier Punkte von* $\mathfrak{f}$ *in einer Ebene, so liegen auch die vier Bildpunkte auf* $\mathfrak{f}'$ *in einer Ebene.*

Natürlich ist damit nur für einen wenigstens dreidimensionalen Raum P' etwas ausgesagt. Unter den angegebenen Voraussetzungen sprechen wir die folgende Behauptung aus:

Die Abbildung φ *kann, wenn nur* $n\geqq 2$ *ist, auf genau eine Weise zu einer Kollineation von* P *auf* P' *fortgesetzt werden.*

Der Beweis läuft etwa so. Die Punkte von P werden intern auf $\mathfrak{f}$ erfaßt durch die Projektionen, die sie auf der Quadrik hervorrufen. Bei der Übertragung durch φ auf die Bildquadrik gehen diese Abbildungen in Projektionen von $\mathfrak{f}'$ über. Die Zuordnung der Projektionszentren setzt die Abbildung φ zu einer eineindeutigen und geradentreuen Abbildung von P auf P' fort, so daß unsere Behauptung auf den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie zurückgeführt werden kann.

Wir beginnen mit einer Erweiterung der Grundeigenschaft (E) unserer Abbildung φ in folgendem Hilfssatz:

(3) *Sind* $Z_1, \ldots, Z_r$ *beliebige Punkte von* $\mathfrak{f}$, *so gilt*

$$\dim \sum_{i=1}^{r} Z_i \geqq \dim \sum_{i=1}^{r} \varphi(Z_i).$$

BEWEIS. Ohne Verlust an Allgemeinheit dürfen wir erstens die Unabhängigkeit der Bildpunkte $Z_i'=\varphi(Z_i)$ voraussetzen und zweitens annehmen, es sei $r\geqq 4$; es gibt ja nach (2) mehr als drei unabhängige Punkte auf $\mathfrak{f}'$.

Wegen der Grundeigenschaft (E) bleibt bei $r=4$ nichts zu beweisen. Wir nehmen an, unsere Behauptung sei für je $r\geqq 4$ Flächenpunkte richtig, für die Punkte $Z_1, \ldots, Z_{r-1}, Z_r, Z_{r+1}$ mit den unabhängigen Bildern $Z_1', \ldots, Z_{r+1}'$ jedoch falsch; insbesondere sind je r der Originalpunkte unabhängig, alle $r+1$ aber abhängig. Es gibt dann einen wohlbestimmten Schnittpunkt

$$X=(Z_1+\cdots+Z_{r-1})\cap(Z_r+Z_{r+1}),$$

der überdies mit keinem der Punkte Z_j ($j = 1, \ldots, r-1$) zusammenfallen kann. Auf wenigstens einer der Geraden $Z_j + X$ findet sich ein Flächenpunkt $Z \neq Z_j$; denn entweder ist X in einer der Polaren $\mathfrak{q}(Z_j)$ nicht enthalten, dann ist (1a) auf $Z_j + X$ anwendbar, oder X ist selbst Flächenpunkt. Die Dimensionen der Unterräume

$$Z_1' + \cdots + Z_{r-1}' + Z' \quad \text{und} \quad Z_j' + Z' + Z_r' + Z_{r+1}'$$

mit der gemeinsamen Geraden $Z_j' + Z'$ sind wegen obiger Annahme $\leq r-2$ bzw. ≤ 2, so daß die Punkte $Z_1', \ldots, Z_{r-1}'$ insgesamt einen höchstens $(r-1)$-dimensionalen Raum aufspannen würden, im Widerspruch zur vorausgesetzten Unabhängigkeit.

4. Wir greifen nun einen nicht auf $\mathfrak{f}$ liegenden Punkt X von P heraus und betrachten die Projektion π von $\mathfrak{f}$ auf sich aus X. Die Projektion erhält man, indem man diejenige projektive Involution in P, die X und die Punkte der Polaren $\mathfrak{q}(X)$ fest läßt, auf die Quadrik einschränkt. Vermöge π werden je zwei Flächenpunkte auf einer Geraden durch X vertauscht; genau die Flächenpunkte in der Polaren $\mathfrak{q}(X)$ bleiben fest.

Durch Transformation von π mit der Abbildung φ erzeugen wir eine eineindeutige und involutorische Selbstabbildung $\pi' = \varphi \pi \varphi^{-1}$ der Bildquadrik $\mathfrak{f}'$ und nehmen uns vor zu zeigen, daß auch π' die Projektion aus einem passenden Punkt X' von P' ist.

Fixpunkte von π' sind genau die φ-Bilder der Fixpunkte von π. Auf Grund des Hilfssatzes (3) kann man auch die Fixpunkte von π' in eine Hyperebene einschließen. Bleibt ein Punkt $Z' = \varphi(Z)$ bei π' nicht fest, so nennen wir die Gerade $Z' + \pi'(Z') = \varphi(Z) + \varphi\pi(Z)$ seine π'-*Spur*.

Je zwei π'-Spuren treffen sich, weil je vier Originalpunkte $Z_1, \pi(Z_1)$; $Z_2, \pi(Z_2)$ komplanar sind. Andererseits können die π'-Spuren nicht alle in einer Ebene, nicht einmal in einer Hyperebene liegen; weil nämlich die Fixpunkte von π' in einer Hyperebene enthalten sind, würde man dann in Gegensatz zu (2) geraten. Daraus ergibt sich erstens, daß alle π'-Spuren durch einen gemeinsamen Punkt X' gehen. Zweitens kann dieser Punkt nicht zu $\mathfrak{f}'$ gehören; in diesem Falle wäre nämlich X' sicher Fixpunkt von π', jede π'-Spur müßte wenigstens drei Flächenpunkte enthalten, also gemäß (1b) in der Polaren $\mathfrak{q}'(X')$ liegen, was nicht geht.

Die Verbindungsgerade von X' mit einem Flächenpunkt Z' trägt entweder nur diesen einen Flächenpunkt, oder noch genau einen zweiten. Der erste Fall tritt dann und nur dann ein, wenn Z' in der Polaren $\mathfrak{q}'(X')$ liegt; Z' ist dann notwendig Fixpunkt von π'. Im zweiten Fall werden die beiden Flächenpunkte auf der Geraden bei π' entweder vertauscht, oder sie bleiben beide fest. Wenn diese zuletzt genannte Möglichkeit ausgeschlossen werden kann — und darin liegt eine gewisse Schwierigkeit — dann ist π' in der Tat die Projektion aus dem Punkte X'.

Nehmen wir also an, π' hätte Fixpunkte außerhalb $\mathfrak{q}'(X')$; sie müssen in einer Hyperebene H' durch X' liegen. Auch π besitzt dann Fixpunkte, und zwar spannen diese die Polare $\mathfrak{q}(X)$ auf, wie sich aus (1a) ergibt.

Jeder Punkt Y aus $\mathfrak{q}(X)$, der nicht zu $\mathfrak{f}$ gehört, gibt Anlaß zu einer Projektion λ. Die Fixpunkte von π werden dabei nur untereinander permutiert; sicher gibt es zwei verschiedene, die bei λ vertauscht werden, d.h. gewisse λ-Spuren liegen in $\mathfrak{q}(X)$. Mithin liegen auch gewisse Spuren der transformierten Abbildung $\lambda' = \varphi\lambda\varphi^{-1}$ in H', ebenso der Treffpunkt Y' aller λ'-Spuren. Schließlich lassen sich in der Ebene, die X mit irgendeiner in $\mathfrak{q}(X)$ liegenden λ-Spur aufspannt, mit Hilfe von (1a) Flächenpunkte ausfindig machen, die nicht zu $\mathfrak{q}(X)$ gehören, so daß jede λ-Spur aus $\mathfrak{q}(X)$ von einer π-Spur getroffen wird.

Diese Tatsachen werden nutzbar, wenn wir außerdem wissen, daß bei φ kein Flächenpunkt außerhalb $\mathfrak{q}(X)$ in H' abgebildet werden kann. Zunächst gibt es offenbar einen Punkt Z_1 auf $\mathfrak{f}$ mit $\varphi(Z_1)$ außerhalb H', also Z_1 nicht in $\mathfrak{q}(X)$. Liegt auch $Z_2 \neq Z_1$ auf $\mathfrak{f}$, nicht aber in $\mathfrak{q}(X)$, so läßt sich der wohlbestimmte Schnittpunkt der Geraden $\varphi(Z_1) + \varphi(Z_2)$ mit H' angeben. Je nachdem der Punkt $Y = (Z_1 + Z_2) \cap \mathfrak{q}(X)$ Flächenpunkt ist oder nicht, verwenden wir Hilfssatz (3) bzw. den vorhergegangenen Abschnitt um zu begründen, daß der gesuchte Schnittpunkt mit $\varphi(Y)$ bzw. mit dem Spurentreffpunkt Y' der zu Y gehörigen transformierten Abbildung λ' identisch ist. Jedenfalls ist er von $\varphi(Z_2)$ verschieden, so daß auch Z_2 wunschgemäß nicht in H' abgebildet wird. Es folgt, daß eine π'-Spur mit H' nur den Punkt X' gemeinsam hat.

Schließlich wählen wir einen beliebigen Fixpunkt Z von π und legen durch ihn zwei verschiedene Geraden, die je genau einen weiteren Fixpunkt Z_1 bzw. Z_2 von π enthalten. Die Geraden lassen sich auffassen als Spuren von Projektionen aus je einem passenden Punkt Y_1 bzw. Y_2 in $\mathfrak{q}(X)$; jede solche Spur wird von einer π-Spur getroffen. Nach der Transformation mit φ erscheinen zwei Spuren in H', die den Punkt $\varphi(Z)$, aber auch noch den Punkt X' gemeinsam haben, weil sie nämlich je von einer π'-Spur getroffen werden, was nur in X' geschehen kann. Da es eine Spur mit den drei verschiedenen Flächenpunkten $\varphi(Z)$, $\varphi(Z_1)$ und $\varphi(Z_2)$ nicht geben kann, ist unsere Annahme über Fixpunkte von π' außerhalb $\mathfrak{q}'(X')$ endgültig zu Fall gebracht.

5. Wir können jetzt jedem Punkt X von P, der nicht zu $\mathfrak{f}$ gehört und deshalb eine Projektion π liefert, eindeutig einen nicht auf $\mathfrak{f}'$ liegenden Punkt X' von P' zuordnen, nämlich das Zentrum der Projektion $\pi' = \varphi\pi\varphi^{-1}$. Durch die Vorschrift

$$\Phi(X) = \begin{cases} \varphi(X) & \textit{für } X \textit{ auf } \mathfrak{f}; \\ X' & \textit{sonst} \end{cases}$$

wird die ursprünglich vorgelegte Abbildung φ als eindeutige Abbildung auf ganz P fortgesetzt. Offenbar kann eine geradentreue Fortsetzung von φ nicht anders aussehen.

Aus $\Phi(X_1) = \Phi(X_2)$ folgt $X_1 = X_2$. Die beiden Punkte X_1, X_2 müssen ja entweder beide zu $\mathfrak{f}$ gehören oder beide nicht, und höchstens der letzte Fall

ist problematisch. Wenn aber die Projektionen $\varphi\pi_1\varphi^{-1}$ und $\varphi\pi_2\varphi^{-1}$ wegen der gleichen Zentren zusammenfallen, so sind auch π_1 und π_2 mitsamt ihren Spurentreffpunkten X_1 und X_2 identisch. Die Einfachheit dieses Schlusses ist erkauft durch die Mühe beim vorausgegangenen Nachweis, daß die mit φ transformierten Projektionen durch ihren Spurentreffpunkt vollständig beschrieben sind.

Die eineindeutige Abbildung Φ soll letzten Endes als geradentreue Abbildung von P auf P' erkannt werden. Dies wird vorbereitet durch die Bemerkung, daß Φ die Polaritäten der beiden Quadriken ineinander transformiert.

Zwei verschiedene Punkte X_1, X_2 auf $\mathfrak{f}$ sind konjugiert oder nicht, je nachdem alle Punkte der Verbindungsgeraden Flächenpunkte sind oder nicht; im ersten Falle liegt auch die Verbindungsgerade der Bildpunkte $\Phi(X_1)$, $\Phi(X_2)$ ganz in $\mathfrak{f}'$, was man mit Hilfe von (3) und (1b) einsieht, im zweiten Falle gibt es einander zugeordnete Projektionen π und π', welche die Punkte X_1, X_2 bzw. $\Phi(X_1)$, $\Phi(X_2)$ je vertauschen. Auch bei anderen Punktepaaren X_1, X_2 können wir die konjugierte Lage an gleichwertigen, Φ-invarianten Eigenschaften erkennen. Ein Punkt X_1 außerhalb $\mathfrak{f}$ und ein Flächenpunkt X_2 sind konjugiert genau dann, wenn X_2 bei der Projektion aus X_1 fest bleibt. Zwei Punkte $X_1 \neq X_2$ außerhalb $\mathfrak{f}$ sind konjugiert, wenn diejenigen beiden projektiven Involutionen in P, die auf $\mathfrak{f}$ die Projektionen aus X_1 bzw. X_2 induzieren, miteinander vertauschbar sind und umgekehrt. Vertauschbarkeit der beiden Involutionen ist aber notwendig und natürlich auch hinreichend für Vertauschbarkeit der Projektionen selbst; bleibt nämlich $\mathfrak{f}$ beim Kommutator der Projektionen punktweise fest, so können die Fixpunkte des induzierenden Kommutators nach (2) nicht in zwei Hyperebenen eingebettet werden, so daß dieser die Identität in P sein muß[1]). Insgesamt sehen wir, daß mit X_1, X_2 stets auch die Bildpunkte $\Phi(X_1)$, $\Phi(X_2)$ konjugiert sind und umgekehrt.

Nun können wir zeigen, daß jeder Punkt X' des Bildraumes P' ein Urbild $\Phi^{-1}(X')$ besitzt; natürlich dürfen wir annehmen, daß X' nicht auf $\mathfrak{f}'$ liegt. Dann wird die Polare $\mathfrak{q}'(X')$ entweder von unabhängigen Flächenpunkten $Z'_0, \ldots, Z'_n$ aufgespannt, oder sie ist frei von Flächenpunkten. Im ersten Fall gibt es in P einen zu $\Phi^{-1}(Z'_0), \ldots, \Phi^{-1}(Z'_n)$ konjugierten Punkt X, und $\Phi(X)$ fällt — weil zu $Z'_0, \ldots, Z'_n$ konjugiert — mit X' zusammen. Im zweiten Fall verbinden wir X' mit zwei Flächenpunkten Z'_{11} und Z'_{21}, um zwei verschiedene Geraden $G'_1 = Z'_{11} + Z'_{12}$ und $G'_2 = Z'_{21} + Z'_{22}$ durch X' mit je genau zwei Flächenpunkten zu erhalten. Die in $\mathfrak{q}'(X')$ liegende Polare der Ebene $G'_1 + G'_2$ enthält $n-1$ paarweise konjugierte Punkte $X'_0, \ldots, X'_{n-2}$, von denen keiner zu $\mathfrak{f}'$ gehört. Der erste Teil des Beweises zeigt, daß diese $n-1$ Punkte Urbilder besitzen. Die Urbilder liegen einerseits nicht auf $\mathfrak{f}$ und sind paarweise konjugiert, also unabhängig; andererseits sind sie auch zu den Urbildern der Z'_{ij}

[1]) Allgemein folgt so, daß eine Projektivität in P durch ihren Verlauf auf $\mathfrak{f}$ eindeutig festgelegt ist.

konjugiert. Die Geraden $\Phi^{-1}(Z'_{11}) + \Phi^{-1}(Z'_{12})$ und $\Phi^{-1}(Z'_{21}) + \Phi^{-1}(Z'_{22})$ liegen daher in einer Ebene; sie schneiden sich in einem Punkte X, der nicht zu $\mathfrak{f}$ gehören kann. Die Geraden G'_1, G'_2 erweisen sich so als Spuren der zu X gehörigen transformierten Projektion, und wir erhalten $X' = \Phi(X)$.

Schließlich ergibt sich ganz leicht die Geradentreue von Φ. Drei verschiedene Punkte X_1, X_2, X_3 in P (oder in P') sind nämlich genau dann kollinear, wenn jeder zu X_1 und X_2 konjugierte Punkt des Raumes auch zu X_3 konjugiert ist, und diese Charakterisierung ist bei Φ invariant.

Gestützt auf den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie erkennen wir die Abbildung Φ als eine Kollineation von P auf P' und haben damit unser Ziel erreicht.

Es folgt beispielsweise, daß eine Abbildung mit der Eigenschaft (E) nur zwischen zwei Quadriken existieren kann, die über isomorphen Körpern erklärt sind.

Karlsruhe, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 29. März 1961)

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie
der Wissenschaften

Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Jahrgang 1960/1961

Erste Abhandlung

Über verschiedene Differentenbegriffe

Von Robert Berger
aus dem Mathematischen Institut der Universität Heidelberg

Mit 1 Textabbildung. 44 Seiten Gr.-8°. 1960. DM 8,40

INHALTSÜBERSICHT

Einleitung · Die Differente von E. Kähler, $\mathfrak{D}_K$: Der Differentialmodul einer Ringerweiterung. Die Fittingschen Determinantenideale. Definition und Grundeigenschaften der Kählerschen Differente · Die Differente von E. Noether, $\mathfrak{D}_N$: Definition und allgemeiner Zusammenhang mit $\mathfrak{D}_K$. Grundeigenschaften von $\mathfrak{D}_N$ · Zusammenhang zwischen $\mathfrak{D}_D$, $\mathfrak{D}_K$ und $\mathfrak{D}_N$ in Spezialfällen: Hauptordnungen separabler Körpererweiterungen. Die Gleichheit von $\mathfrak{D}_D$ und $\mathfrak{D}_N$ bei Existenz einer Basis · Eine Bemerkung zu den cohomologischen Differenten von Kuniyoshi · Literatur.

Vierte Abhandlung

Projektive Frobenius-Erweiterungen

Von Privatdozent Dr. Friedrich Kasch
aus dem Mathematischen Institut der Universität Heidelberg

23 Seiten Gr.-8. 1961. DM 6,—

INHALTSÜBERSICHT

Einleitung · Definition und Kennzeichnung von Frobenius-Erweiterungen · Kennzeichnung einer Frobenius-Erweiterung durch ihren Endomorphismenring · Homologische Eigenschaften von Frobenius-Erweiterungen · Literatur.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Vor kurzem erschien:

Automat und Mensch

Über menschliche und maschinelle Intelligenz

Von Dr.-Ing. KARL STEINBUCH,
o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe

Mit 92 Abbildungen. VIII, 253 Seiten 8°. 1961.
Flexibler Kunststoffeinband DM 28,50

INHALTSVERZEICHNIS

Vorbetrachtungen · Rationalisierung des Geistigen · Signal und Nachricht · Informationstheorie · Logische Verknüpfungen und Zuordner · Signale in Raum und Zeit · Sprache · Zeichenerkennung · Speicher · Nachrichtenverarbeitung · Regelung · Lernende Automaten · Bedingte Reflexe, die Lernmatrix · Aufnahme und Verarbeitung von Nachrichten durch den Menschen · Motive · Intelligenz · Gullivers Experiment · Das ökonomische Prinzip · Spiel ohne Plan · Automat und Mensch · Literatur- und Sachverzeichnis.

ZUR INFORMATION

Die Fähigkeiten moderner Automaten sprengen die Grenze dessen, was früher für „mechanische Gebilde" als möglich erachtet wurde. Ihre Eigenschaften umfassen Kategorien, die bisher den Menschen vorbehalten waren, z. B. logische Verknüpfung, Zeichenerkennung, Gedächtnis, Lernen. Unsere Einsicht in die Funktion unseres Denksystems ist gering. Wenn Automaten künstlich Intelligenz erzeugen können, erschließt sich dem forschenden Geist ein Weg zum Verständnis des Menschen: Nämlich über das Verständnis des Automaten. Das Buch erklärt die Grundbegriffe, die zum Verständnis moderner Automaten erforderlich sind. Technische Erläuterungen in leicht verständlicher Darstellung veranschaulichen durch Bilder das Wesentliche. Es bringt Überlegungen, wie man mit den Erkenntnissen an Automaten geistige Vorgänge erklären könnte. Das Buch wendet sich an Unvoreingenommene, gleichermaßen an Techniker, Physiker, Mathematiker, ebenso auch an Geisteswissenschaftler und Biologen, im besonderen auch an die wissenschaftlich interessierte Jugend.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany